Séries e Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Milton de L Oliveira

24 de abril de 2020

Capítulo 1

Sequências

1.1 Sequências Numéricas

Uma sequência numérica é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real a_n, isto é, $f(n) = a_n$. O termo a_n diz-se o n-ésimo termo da sequência ou termo geral da sequência.

Example 1. *1.* $1, 1/2, 1/3, \cdots,\ a_n = 1/n$

2. $-1, 1, -1, 1, \cdots,\ b_n = (-1)^n$

3. $x_n = \dfrac{-n}{n+1}$ *é o termo geral da sequência* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = -\dfrac{n}{n+1}$.

4. $f(n) = \begin{cases} 1/n, & n \quad \textit{par} \\ -1/n^2, & n \quad \textit{ímpar}, \end{cases} \quad -1, 1/2, -1/9, 1/4, \cdots$

Se considerarmos $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$ a restrição de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$ é chamada de subsequência ou subsucessão da sequência original $f(n)$.

Example 2. *1. A sequência $a_n = (-1)^n$ tem como subsequências $a_{2n} = 1$ e $a_{2n-1} = -1$.*

2. A sequência $\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{7}, \cdots$ *é uma subsequência da sequência* $a_n = \dfrac{1}{n}$. *Observe que poderíamos denotá-la por* $b_n = \dfrac{1}{n+4}, \quad n \in \mathbb{N}$ *ou ainda* $b_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}'$ *onde* $\mathbb{N}' = \{5, 6, 7, \dots\}$.

De forma geral, fixado $p \in mathbbN$, então a sequência com termo geral $b_n = a_{n+p}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$, onde consideramos para domínio o subconjunto $\mathbb{N}' = \{1+p, 2+p, 3+p, \cdots\}$.

Definition 3. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **limitada superiormente** quando existir um número real M, denominado cota superior da sequência que satisfaz*

$$a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition 4. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **limitada inferiormente** quando existir um número real m, denominado cota inferior da sequência que satisfaz*

$$a_n \geq m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition 5. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **limitada** quando ela for limitada superiormente e inferiormente, isto é, quando existir uma constante positiva C, tal que*

$$|a_n| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

É claro que se M for uma cota superior de uma dada sequência $\{a_n\}$, então qualquer número real maior do que M também será cota superior da sequência $\{a_n\}$. A menor dessas cotas superiores será chamada de **supremo** da sequência $\{a_n\}$ e a denotamos por $\mathbf{sup}\{a_n\}$. Analogamente, definimos o ínfimo da sequência $\{a_n\}$ e denotamos por $\mathbf{inf}\{a_n\}$, que é a maior das cotas inferiores da sequência. Note que para cada $\epsilon > 0$ o número real $\alpha = sup\{a_n\} - \epsilon$ é menor que o supremo da sequência $\{a_n\}$ e, portanto, não pode ser cota superior dessa sequência, por esse motivo, deve existir um n_0 tal que $\alpha < a_{n_0}$. Para o ínfimo ocorre fato análogo, ou seja, sendo $\beta = \inf\{a_n\} + \epsilon$ existe algum termo da sequência tal que $\beta > a_{n_0}$.

Example 6.

1. *A sequência $\{a_n\} = n$ é limitada inferiormente, mas não é limitada superiormente,* $\inf a_n = 1$.

2. *A sequência $a_n = 1 - n^2$ é limitada superiormente, mas não é limitada inferiormente e* $\sup a_n = 0$.

3. *A sequência $a_n = (-1)^n$ é limitada, sendo* $\sup a_n = 1$ *e* $\inf a_n = -1$.

4. *A sequência $a_n = 1/n$ é limitada,* $\sup a_n = 1$ *e* $\inf a_n = 0$.

5. *A sequência $a_n = (-1)^n n$ não é limitada superiormente nem inferiormente.*

1.1.1 Indução Matemática

Se uma propriedade qualquer P vale para $n = 1$ e supomos ela válida para n e provamos que P vale para $n + 1$, então P vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Esse é o princípio de Indução Matemática.

Example 7. *Seja $n! = 1.2.3 \cdots n$. Provemos que $n! \geq 2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

De fato, sabemos que $1! \geq 2^{1-1}$, assim essa propriedade vale para $n = 1$, suponha que ela vale para n, isto é, $n! \geq 2^{n-1}$. Considere agora, $(n + 1)! = (n + 1)n!$, desse modo,

$$(n + 1)! = (n + 1)n! \geq (n + 1)2^{n-1} \geq (1 + 1)2^{n-1} = 2^n$$

Logo, a propriedade vale para $n + 1$, e, portanto, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Example 8. *Provemos que $A_n = 3(n^2+n)$ é divisível por 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De fato, temos que para $n = 1$ $A_1 = 3(1^2 + 1) = 6$ que divide 6. Suponha que $A_n = 3(n^2 + n)$ seja divisível por 6, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = 6k$. Agora considere,

$$A_{n+1} = 3[(n + 1)^2 + (n + 1)] = 3(n^2 + n) + 3[(2n + 1) + 1] = 6k + 6(n + 1)$$

Logo, A_{n+1} é divisível por 6. Por indução, essa propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Sequências Monótonas

Definition 9. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **crescente** ou **não decrescente** quando $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $a_n < a_{n+1}$ ela é dita estritamente crescente.*

Definition 10. *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **decrescente** ou **não crescente** quando $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $a_n > a_{n+1}$ ela é dita estritamente decrescente.*

Definition 11. *Uma sequência é dita **monótona** se ela é crescente ou decrescente.*

Example 12.

1. *As sequências $a_n = n$ e $b_n = \ln n$ são crescentes, enquanto que, $c_n = -n^3$ e $d_n = 1/n$ são decrescentes.*

2. *A sequência $a_n = (-1)^n$ não é monótona, isto é, ela não é crescente nem decrescente. É uma sequência alternada.*

3. A sequência $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *é crescente. De fato, note que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \geq 1, \forall n.$$

A **monotonicidade** de alguma sequências pode ser deduzida por investigação do sinal da derivada da função extensão. Isto é, se $f(x)$ satisfaz $f(n) = a_n$. Por exemplo, para a sequência, $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$, podemos analisar a função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e como, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ que é positiva, logo, $f(x)$ é crescente e, por sua vez, $f(n)$ também é crescente.

Example 13. *Para a sequência* $a_n = \dfrac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)}$ *não é possível definir a função extensão. Mas note que,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{1.3.5\cdots(2n-1)(2n+1)}\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n+1}{2n+1} < 1$$

logo, $a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *o que implica que* a_n *é decrescente.*

1.3 Sequências Convergentes

Definition 14. *Dizemos que* $\{a_n\}$ *converge para um número real* l *se dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n - l| < \epsilon$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Neste caso, denotamos* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$*. E dizemos que* a_n *é* ***convergente****. Caso contrário, se tal limite não existe, dizemos que a sequência* $\{a_n\}$ *é* ***divergente****.*

Note que;

$$|a_n - l| < \epsilon$$

se, e somente se,

$$-\epsilon < a_n - l < \epsilon$$

ou,

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

isto é,

$$a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon).$$

Um número finito de termos não altera a convergência nem a divergência de uma sequência.

Theorem 15. *Uma sequência convergente* $\{a_n\}$ *não pode ter dois limites.*

Demonstração. De fato, se supomos que a_n converge e $l_1 = \lim a_n$ e $l_2 = \lim a_n$ com $l_1 \neq l_2$ então (suponha $l_1 > l_2$)

$$l_1 - l_2 = |l1 - l2| = |l_1 - a_n + a_n + l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$$

agora tome $\epsilon = (l_1 - l2)/2 > 0$, desse modo, obtemos, $l_1 - l_2 < l_1 - l_2$ o que é absurdo. $\square$

Example 16. 1. *Vamos mostrar que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$*. Dado* $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$*. Logo, se* $n > n_0$ *então* $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon, \quad \forall n > n_0$ *e assim* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

2. *Consideremos a sequência* $a_n = \frac{n}{n+1}$*. Neste caso,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$*. Dado* $\epsilon > 0$*, note que*

$$|\frac{n}{n+1} - 1| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Escolhendo o primeiro n_0 *tal que* $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$ *então para todo* $n > n_0$ *temos*

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Rightarrow |\frac{n}{n+1} - 1| < \epsilon.$$

3. *A sequência* $b_n = r^n$*, onde* $r \in \mathbb{R}$*, fixo, tal que* $-1 < r < 1$*, converge para zero. Escolha* $r \neq 0$*, dado* $\epsilon > 0$*, como* $0 < |r| < 1$*, temos que* $\ln|r|$ *está definido, é diferente de zero, e* $\ln|r| < 0$*. Assim*

$$|r^n - 0| = |r|^n < \epsilon \Leftrightarrow n\ln|r| < \ln\epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|r|}$$

Escolha n_0 *maior ou igual a* $\dfrac{\ln\epsilon}{\ln|r|}$ *assim* $|r^n| < \epsilon$ *o que implica em* $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

4. *Existem sequências (não limitadas) cujos termos crescem indefinidamente à medida que* n *aumenta, por exemplo, a sequência* $a_n = n$*. Nesse caso, dizemos que a sequência tem limite infinito e denotamos* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*, isso significa que dado* $K > 0$ *qualquer, existe* n_0 *tal que* $a_n > K$ *para todo* $n > n_0$*. Para a sequência* $b_n = -n$ *,* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

5. *Se* $|r| > 1$ *então* $\lim_{n\to\infty} |r|^n = +\infty$ *e* $\lim_{n\to\infty} r^n$ *não existe.*

6. *Se* $a_n = (-1)^n$ *e como,* $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$*, logo, o limite de* a_n *não existe.*

Theorem 17. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência convergente com limite l. Isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ ou dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $|a_n - l| < \epsilon$, $\forall n > n_0$ ou seja,

$$-\epsilon < a_n - l < \epsilon, \ \forall n > n_0$$

ou

$$|a_n| < |l| + \epsilon, \ \ \forall n > n_0$$

considere $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|, |l| + \epsilon\}$ então

$$|a_n| \leq M, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

segue que (a_n) é limitada. □

A recíproca não é verdadeira pois, por exemplo, a sequência $b_n = \operatorname{sen} n$ é limitada mas $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n$ não existe.

Theorem 18. *Sejam (a_n) uma sequência limitada e (b_n) uma sequência que converge a zero então $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.*

Demonstração. Como (a_n) é limitada então existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ então dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $|b_n| < \dfrac{\epsilon}{M}, \ \ \forall n > n_0$. Desse modo,

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq M\frac{\epsilon}{M} < \epsilon, \ \forall n > n_0$$

logo, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. □

Example 19. *A sequência $\frac{1}{n} \operatorname{sen} n$ converge a zero. Pois, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $|\operatorname{sen} n| \leq 1$. E pelo teorema 18 temos que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.*

Theorem 20. *Temos que o $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.*

Note que se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então necessariamente, o $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$. (Isso porque $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$). Mas, se $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ existe isso não implica que $\lim_{n\to\infty} a_n$ exista. Pois, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe, mas $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = 1$.

Theorem 21. *Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$ e (b_n) é tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ então $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.*

Demonstração. De fato, $|a_n - l| < \epsilon$ e $|c_n - l| < \epsilon$ então

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon,\ \forall n > n_1$$

$$l - \epsilon < c_n < l + \epsilon\ \forall n > n_2$$

tome $n_0 = \max n_1, n_2$ então

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon,\ \forall n > n_0$$

logo,

$$l - \epsilon < b_n < l + \epsilon,\ \forall n > n_0$$

ou $|b_n - l| < \epsilon,\ \forall n > n_0$. □

Theorem 22. *Se* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, *então a sequência* $a_n = f(n)$, $n > a$ *é convergente e* $lim_{n\to\infty} f(n) = l$. *Se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ *então* $lim_{n\to\infty} f(n) = \pm\infty$.

Example 23. *Considere a sequência* $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ *e calcule o* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Note que a função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ é tal que $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$ então $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Example 24. *Para calcular o* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$. *Tomamos a função* $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ *e como*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

segue que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

1.3.1 Propriedades do Limite

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências convergentes limites l e r, respectivamente. Então:

1. $a_n \pm b_n$ converge para $l \pm r$;
2. ca_n converge para cl;
3. $|a_n|$ converge para $|l|$;
4. $a_n b_n$ converge para lr;
5. se $r \neq 0$ então $\frac{a_n}{b_n}$ converge para $\frac{l}{r}$.

Vamos provar uma das propriedades acima, por exemplo, pode ser a propriedade 4. Suponha que $a_n \to l$ e $b_n \to r$ então dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_n - l| < \epsilon$ e $|b_n - r| < \epsilon$ para todo $n > n_1$ e $n > n_2$, assim, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que para $n > n_0$

$$|a_nb_n - lr| < |a_nb_n - a_nr + a_nr - lr| \leq |a_n||b_n - r| + |r||a_n - l| < M\epsilon + |r|\epsilon = (M + |r|)\epsilon.$$

Example 25. *Analise sobre a convergência das sequências a seguir:*

$$(a)\ a_n = \frac{3n+1}{5n} + \frac{(-1)}{n} \quad (b)\ b_n = \cos\frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n}) \quad (c)\ c_n = \frac{n^2+3}{4n^2-2n+1}.$$

Theorem 26. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Suponha (a_n) uma sequência crescente e limitada. Segue que existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M, \ \ \forall n$$

isto é, $a_n \leq M$. Logo, M é uma cota superior para (a_n), seja $l = \sup a_n$ então l é a menor das cotas superiores de (a_n), assim $l - \epsilon$ não é cota superior de (a_n) então existe n_1 tal que

$$l - \epsilon < a_{n_1} \leq l.$$

Como (a_n) é crescente então $a_n > a_{n_1}$ para todo $n > n_1$, segue que,

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \ \ \forall n > n_1$$

isto é,

$$|a_n - l| < \epsilon, \ \ \forall n > n_1$$

o que implica em $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. □

Example 27. *Vimos que a sequência cujo termo geral é* $a_n = \dfrac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)}$ *é decrescente. Veriquemos que ela também é limitada.*

De fato, temos que

$$0 < a_n = \frac{1}{1}\frac{2}{3}\frac{3}{5}\cdots\frac{n}{2n-1} \leq 1.1.1\cdots 1 = 1, \ \ \forall n$$

Logo, pelo teorema 26 a_n é convergente. Além disso, $\inf a_n = 0$. Logo, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)} = 0$.

Theorem 28. *Se uma sequência (a_n) converge para um l então todas as subsequências dela convergem para l.*

Demonstração. Se pelo menos uma das subsequências de (a_n) digamos (a_{n_k}) tivesse um outro limite $r \neq l$ então $a_{n_k} \to r$ e $a_n \to l$ com $l \neq r$, mas isto contradiz o fato de limite ser único. $\square$

Example 29. *A sequência $(-1)^n$ possui subsequências tais que $(-1)^{2k} \to 1$ e $(-1)^{2k-1} \to -1$. Logo, $(-1)^n$ não converge. Por outro lado, a sequência $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge para zero, pois $|(-1)^n| \leq 1$ e $\dfrac{1}{n} \to 0$. Assim, $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$.*

Theorem 30. *Teste da Razão para sequências Se uma sequência (a_n) de termos positivos satisfaz à condição $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ então ela converge para zero.*

Demonstração. Seja $l < r < 1$ tal que $0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r,\ \forall n > n_0$. Como $r < 1$ então $0 < a_{n+1} < a_n r < a_n$ o que implica em a_n ser decrescente para $n \geq n_0$. Assim $0 < a_n \leq a_{n_0},\ \forall n > n_0$ o que implica em (a_n) ser limitada. Logo, (a_n) é convergente. Suponha, por absurdo, que $\lim_{n\to\infty} a_n = s \neq 0$ então

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim a_{n+1}}{\lim a_n} = \frac{s}{s} = 1.$$

Mas, $l < 1$. $\square$

Example 31. *As sequências $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $b_n = \dfrac{r^n}{n!}$, $c_n = \dfrac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)}$, $d_n = \dfrac{n^p}{2^n}$ convergem todas a zero.*

De fato, para a sequência a_n temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(}n+1)} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{e} < 1$$

aqui usou-se o limite fundamental:

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

Para a sequência b_n temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{(}n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0,$$

e, para a sequência d_n temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim n \to \infty \frac{(n+1)^p}{2^(n+1)} \frac{2^n}{n^p} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^p = \frac{1}{2} < 1$$

aqui usou-se o fato que se uma função f é contínua num intervalo que contém os termos da sequência (a_n) então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(l)$. se $a_n \to l$. Nesse caso, temos

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^p = (\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n})^p = 1^p = 1$$

Example 32. *Considere a sequência* $a_n = n^{1/n}$ *e calcule* $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$.

Temos que $n^{1/n} = \exp(\frac{1}{n} \ln n)$ daí

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp(\frac{1}{n} \ln n) = \exp(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln n) = \exp 0 = 1.$$

Capítulo 2

Séries Numéricas

2.1 Séries Numéricas

Dada uma sequência $\{a_n\}$ de números reais, a soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

será representada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tais somas infinitas são chamadas de **séries infinitas** ou, simplesmente, **séries**.

Example 33. *1. A soma* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ *que é representada por* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *é uma série geométrica.*

2. A soma infinita $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ *representamos por* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é conhecida como a **série harmônica**.*

Dada uma série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, as **somas parciais** dessa série são:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \cdots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Formamos então uma sequência de somas parciais $\{S_n\}$, se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$ então dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** e sua **soma** é S, isto é, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe então dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

Example 34. *Seja $r \in \mathbb{R}$ e considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, vamos analisar sobre a convergência ou divergência dessa série.*

Seja $\{S_n\}$ a sequência de somas parciais de ordem n da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, isto é,

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

temos que

$$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

daí

$$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$$

ou

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

como $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$ e $\lim_{n\to\infty} r^n$ não existe se $|r| > 1$, então concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge e sua soma é $S = \dfrac{1}{1-r}$ se $|r| < 1$ e, diverge se $|r| > 1$. No caso em que $|r| = 1$ a essa série também diverge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ não existe. Conclusão a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. De forma análoga, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ converge para $\dfrac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$, tal série é chamada de **série geométrica**.

Example 35. *A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \dfrac{1}{2} < 1$, portanto converge e sua soma é $S = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$.*

Theorem 36 (Teste do n-ésimo termo)**.** *Se uma série $\sum a_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demonstração. Temos que

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

como $\sum a_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ e $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ daí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Example 37. *1. A série $\sum(-1)^n$ diverge pois $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ não existe, logo, pelo teste do n-ésimo termo a série $\sum(-1)^n$ não pode convergir.*

2. A série $\sum \dfrac{n}{n+1}$ diverge, pois $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$. Note que, $\dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ e

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$ converge para 1. Tal série é conhecida como **séries de termos encaixantes.** De um modo geral, a série de termos encaixantes pode ser dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

se b_n convergir então $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$. Note que se uma série $\sum a_n$ converge então necessariamente $\lim a_n = 0$. Mas se $\lim a_n = 0$ não implica que $\sum a_n$ convirja.

Um exemplo de série que satisfaz o fato de $\lim a_n = 0$ mas que ela diverge é a série harmônica que será estudada na próxima subseção.

2.1.1 A série harmônica

A série harmônica é série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Temos que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Logo,

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ fosse convergente então as sequências de somas parciais $\{S_n\}$ e $\{S_{2n}\}$ convergiriam e teriam o mesmo limite, e dessa forma, $lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = 0$ Mas, isto é impossível, pois a desigualdade em (2.1) implica em $lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

O acréscimo ou omissão de um número finito de termos não altera a convergência ou divergência de uma série. Podemos daí deduzir que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\lim_{p\to\infty} \sum_{n=p}^{\infty} a_n = 0$. Esse é o critério de Cauchy dado abaixo.

Theorem 38 (Critério de Cauchy)**.** *Uma série $\sum a_n$ converge se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que*

$$|S_n - S_m| < \epsilon, \ \forall n > m \geq n_0.$$

Theorem 39. *Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ diferem apenas em uma quantidade finita de termos então ou ambas convergem ou ambas divergem.*

Demonstração. Por hipótese, existe um índice n_0 tal que $a_n = b_n, \ \forall n \geq n_0$. Logo:

$$S_n = a_1 + \cdots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n$$

$$T_n = b_1 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n$$

daí

$$S_n = S_{n_0} - T_{n_0} + T_n$$

e $\lim S_n = S$ então $\lim T_n = S + T_{n_0} - S_{n_0}$, e se $\lim S_n$ não existe então $\lim T_n$ também não existe. $\square$

Example 40. *As séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n-5}$ são divergentes e as séries $\sum \frac{1}{n^2+n}$ e $\sum \frac{1}{2^n}$ são convergentes.*

Como consequência do Teorema 39 as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Theorem 41 (Propriedades das séries)**.** *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries numéricas e seja $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Se* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *convergem então* $\sum(a_n+b_n)$ *convergem e* $\sum \alpha a_n$ *convergem.*

2. *Se* $\sum a_n$ *converge e* $\sum b_n$ *diverge então* $\sum(a_n+b_n)$ *diverge.*

3. *Se* $\sum a_n$ *diverge e* $\alpha \neq 0$ *então* $\sum \alpha a_n$ *diverge.*

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem nada podemos afirmar sobre $\sum(a_n+b_n)$. Tal soma pode convergir ou não. Exemplo, $\sum(\frac{1}{n}+\frac{-1}{n}) = 0$ converge, mas $\sum(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}) = \sum \frac{2}{n}$ diverge.

2.2 Séries de termos positivos

Uma série $\sum a_n$ é uma série de termos positivos se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que quando $\sum a_n$ é uma série de termos positivos então a sequência de somas parciais (S_n) dessa série é crescente, isto é,

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$$

logo, para que a série $\sum a_n$ convirja bast mostrar que (S_n) é limitada.

Theorem 42 (Teste de comparação)**.** *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *séries de termos positivos. Temos que:*

1. *se* $a_n \leq b_n$ *, para todo* n *e se* $\sum b_n$ *converge então* $\sum a_n$ *converge.*

2. *se* $a_n \geq b_n$*, para todo* n *e se* $\sum b_n$ *diverge então* $\sum a_n$ *diverge.*

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries de termos positivos, com $\sum b_n$ convergente e suponha que

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ então

$$S_n \leq T_n$$

como $\sum b_n$ converge então $\lim T_n$ existe. Logo (T_n) é limitada, desse modo, existe $M > 0$ tal que $T_n \leq M$. Assim,

$$S_n \leq M, \quad \forall n$$

segue (S_n) é convergente, logo $\sum a_n$ converge. Por outro lado, se $\sum b_n$ diverge e $a_n \geq b_n, \ \forall n$, então

$$S_n \geq T_n, \quad \forall n$$

como $\sum b_n$ diverge então $\lim T_n = +\infty$. Desse modo, $\lim S_n \geq \lim T_n \Rightarrow \lim S_n = +\infty$ o que implica $\sum a_n$ diverge. $\square$

Example 43. *Mostre que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ *diverge.*

De fato, note que

$$n+\sqrt{n} < 2n \Rightarrow \frac{1}{n+\sqrt{n}} > \frac{1}{2n}$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ diverge então pelo teste de comparação segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ também diverge.

Example 44. *Analise sobre a convergência ou divergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+n^2}$.

Solução: Note que $n^3+n^2 > n^2+n$ o que implica em

$$\frac{1}{n^3+n^2} < \frac{1}{n^2+n}, \quad \forall n$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$ converge então pelo teste de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+n^2}$ converge.

Theorem 45 (Teste da Integral)**.** *Seja* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *contínua e suponhamos que* f *é positiva e decrescente então:*

1. *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *é convergente se* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *for convergente,*

2. *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *é divergente se* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *for divergente.*

Demonstração. Seja $f(x)$ função monótona decrescente e positiva. Temos que

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$$

ou

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx$$

ou ainda

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx$$

logo S_n é limitada então S_n é convergente, portanto, $\sum f(n)$ converge. De modo análogo,como

$$\int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$$

se $\int_1^{\infty} f(x)dx = +\infty$ então $\lim S_{n-1} = +\infty$, logo, $\sum f(n)$ diverge. □

Example 46. 1. *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *temos que* $f(x)$ *é positiva e decrescente já que* $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$*. A integral* $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}dx$ *converge e, portanto,* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge.*

2. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ *atende às condições expostas mas* $\int_2^\infty \dfrac{1}{x\ln x} = \lim_{B\to\infty}[\ln(\ln x))]_2^B = +\infty$*, logo* $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ *diverge.*

3. *Tomando* $f(x) = xe^{-x^2}$*,* $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = \dfrac{1}{2e}$ *o que implica* $\sum ne^{-n^2}$ *converge.*

A série $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^p}$ é uma **p-série**. Analisemos sobre a convergência ou divergência dessa série. Temos o seguinte resultado.

Theorem 47. *A p-série* $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^p}$ *converge se* $p > 1$ *e diverge se* $p \leq 1$*.*

Demonstração. Calculemos a integral,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{B\to\infty}\int_1^B \frac{1}{x^p}dx = \lim_{B\to\infty}[B^{1-p} - 1],\ p \neq 1$$

se $p < 1$, temos que o $\lim_{B\to\infty} B^{1-p} = +\infty$, se $p > 1$ então $\lim_{B\to\infty} B^{1-p} = 0$. □

Theorem 48 (Forma limite do teste de comparação)**.** *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *duas séries de termos positivos e seja* $l = \lim \dfrac{a_n}{b_n}$*.*

1. *se* $l > 0$ *então ou ambas as séries* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *convergem ou ambas divergem*

2. *se* $l = 0$ *e* $\sum b_n$ *converge então* $\sum a_n$ *converge.*

3. *se* $l = +\infty$ *e* $\sum b_n$ *diverge então* $\sum a_n$ *diverge.*

Demonstração. Fixado $\epsilon = l/2$ podemos encontrar n_0 tal que

$$\frac{l}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}lb_n, \forall n \geq n_0$$

assim, usando o teste de comparação provamos a primeira parte do teorema. Pois se $\sum b_n$ converge então $\sum(\dfrac{3}{2}l)b_n$ também converge e como $a_n \leq (\dfrac{3}{2}l)b_n$ para todo n segue o resultado. Por outro lado, se $\sum b_n$ diverge como $\dfrac{l}{2}b_n \leq a_n$ para todo n, segue que $\sum a_n$ diverge, já que $\sum(l/2)b_n$ diverge. □

Example 49. *Considere a série* $\sum \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}$. *Ela converge ou diverge?*

Solução: Para encontrar uma série que possamos comparar com a série dada olhamos os termos que dominam no numerador e denominador da série original, neste caso, escolhemos $\sum \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ para comparar com a série dada, já sabemos que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ é uma p-série com $p = 1/2 < 1$ logo, diverge. E como $\lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}\sqrt{n} = \frac{6}{5} > 0$ então pela forma limite do teste de comparação segue que $\sum \frac{6\sqrt{n}}{5n+4}$ diverge.

Example 50. *As séries* $\sum e^{-n^2}$ *e* $\sum \operatorname{sen}^4(\frac{1}{n})$ *convergem ou divergem?*

Solução: Como $\lim e^{-n^2}/1/n^2 = 0$ e $\lim \frac{\operatorname{sen}^4(\frac{1}{n})}{1/n^4} = 1$ então ambas as séries convergem, pela forma limite do teste de comparação, já que as séries $\sum 1/n^2$ e $\sum 1/n^4$ convergem.

Theorem 51 (Reagrupamento)**.** *O reagrupamento de séries de termos positivos que sejam convergentes não altera a convergência da série.*

Dadas duas séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergentes então $\sum a_n b_n$ não é necessariamente convergente. Além disso,

$$\sum a_n b_n \neq \sum a_n \sum b_n = \sum c_n$$

onde

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Example 52. *Temos que a série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge mas* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum 1/n$ *diverge.*

2.3 Séries Alternadas

Séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^(n-1) a_n$ com os termos $a_n \geq 0$ para todo n é dita **série alternada**. Ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

Theorem 53 (Critério de Leibniz)**.** *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos com as propriedades:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ *, isto é, (a_n) monótona decrescente.*

Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Demonstração. Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, temos que

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n-1})$$

ou seja, (S_{2n}) é monótona crescente, e reagrupando seus termos temos

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq a_1$$

logo, (S_{2n}) é limitada, segue que existe $S = \lim S_{2n}$. Agora, como

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

passando o limite

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0$$

logo, o $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, portanto $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge. □

Example 54. *A série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, pois o $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\forall n$.*

Example 55. *A série $\sum \frac{(-1)^n}{n5^n}$ converge pelo teste de Leibniz.*

Example 56. *A série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-5}$ converge também pelo Teste de Leibniz.*

Theorem 57. *O erro que se comete ao se aproximar a soma da série $\sum(-1)^n a_n$ por S_n é de a_{n+1}.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} |S_n - S| = |\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k| &= |(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \cdots| \\ &= |(-1)^{n+1}[a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots]| \\ &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots \leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Example 58. *Para a série do exemplo 94 temos que*

$$S_4 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{50} - \frac{1}{325} + \frac{1}{2500} \approx -0,18$$

o erro cometido para essa aproximação foi $a_5 = \dfrac{1}{15625} \approx 64 \times 10^{-6}$

2.4 Convergência Absoluta

Uma série $\sum a_n$ **converge absolutamente** se a nova série $\sum |a_n|$ converge. Por exemplo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge absolutamente pois a série $\sum \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica de razão $r = 1/2$ e, portanto, convergente.

Theorem 59 (Convergência absoluta)**.** *Se uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente então ela é convergente.*

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ converge absolutamente então $\sum |a_n|$ converge. Podemos considerar $b_n = a_n + |a_n|$ como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ então

$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|$$

Logo, $\sum b_n$ converge pelo teste de comparação. Então

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - |a_n|$$

converge. □

Uma série $\sum a_n$ tal que $\sum |a_n|$ diverge é dita **condicionalmente convergente**. Por exemplo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge pelo teste das séries alternadas mas a série $\sum |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum \frac{1}{n}$ diverge. Logo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente.

Example 60. *A série $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge ou diverge?*

Solução: Note que

$$|\operatorname{sen} n| \leq 1$$

daí

$$\frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

portanto $\sum \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$ converge, pelo teste de comparação, logo, a série $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge absolutamente.

2.5 Teste da Razão e da Raíz

Theorem 61 (Teste da Razão)**.** *Consideremos uma série $\sum a_n$ com e seja $l = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.*

1. *se $l < 1$ então a série $\sum a_n$ converge absolutamente.*

2. *se $l > 1$ ou $l = \infty$ então $\sum a_n$ diverge.*

3. se $l = 1$ nada se pode concluir.

Demonstração. Se $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l < 1$ então existe um número real $0 < r < 1$ tal que

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < r, \ \forall n > n_0$$

desse modo

$$|a_{n_0+k}| \leq r^k |a_{n_0}|, \ \forall k \geq 1$$

Como $\sum r^k$ é convergente então $\sum |a_{n_0}| r^k$ também converge e $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n|$ converge pelo teste de comparação, logo, $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, o que implica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (um número finito de termos não altera a convergência ou divergência da série). Se, por outro lado, $l > 1$, então $|a_{n+1}| > |a_n|$ e se, $a_{n_0} \neq 0$ para algum n_0 então, $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ o que nos dá $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Logo, $\sum a_n$ diverge (teste do n-ésimo termo). □

Example 62. *Considere a série as séries $\sum \frac{3^n}{n!}$ e $\sum \frac{3^n}{n^2}$ analise sobre a convergência ou divergência dessas séries.*

Solução: Pelo teste da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

então a série $\sum \frac{3^n}{n!}$ converge pelo teste da razão. E como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{3^n} = 3 > 1$$

então a série $\sum \frac{3^n}{n^2}$ diverge pelo teste da razão.

Example 63. *Considere a série $\sum (-1)^n \frac{n^2+4}{2^n}$ ela converge ou diverge?*

Solução: Usando o teste da razão temos

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}[(n+1)^2+4]}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-1)^n(n^2+4)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} (\frac{n^2+2n+5}{n^2+4}) = \frac{1}{2} < 1$$

o que implica que a série converge.

Theorem 64 (Teste da Raíz)**.** *Seja $\sum a_n$ uma série numérica. Seja* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. *Temos que*

1. *se* $l < 1$ *então* $\sum a_n$ *converge absolutamente.*
2. *se* $l > 1$ *então* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *se* $l = 1$ *nada se conclui.*

Demonstração. Suponha $l < 1$ então existe $0 < r < 1$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r, \ \ \forall n > n_0$$

ou

$$|a_n| < r^n, \ \ \forall n > n_0$$

como $\sum r^n$ converge segue que $\sum |a_n|$ converge e, portanto, $\sum a_n$ converge absolutamente. Por outro lado, se $l > 1$ então existe $r > 1$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r, \ \ \forall n > n_0$$

ou

$$|a_n| > r^n, \ \ \forall n > n_0$$

como $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ o que implica $\sum a_n$ diverge (Por quê?). □

Example 65. *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$*. Pelo teste da raíz:* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$*. Logo,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ *converge absolutamente.*

Example 66. *A série* $\sum \frac{n^n}{2^n}$ *diverge pois, usando o teste da raíz, temos que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty$.

Example 67. *A série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge e a série* $\sum \frac{1}{n^2}$ *convergente mas* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$*, e o limite* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = 1$*. Se usarmos o teste da razão para essas mesmas séries obtemos resultados semelhantes do limite, ou seja, o limite será igual a* 1*. Por isso, quando* $l = 1$ *o resultado é inconclusivo, pois a série tanto pode convergir como divergir.*

Capítulo 3

Séries de Potências

3.1 Séries de Potências

Uma série de potências de x é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Example 68. *A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

é uma série de potências de x. Observe que ela é uma série geométrica de razão $r = x$. Como a série geométrica só converge se $|r| < 1$ então a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ só converge se $|x| < 1$. Neste caso, sua soma é $S = \dfrac{1}{1-x}$. Podemos então afirmar que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots\ , \quad |x| < 1.$$

Dada uma série de potências de x, $\sum a_n x^n$, usando o teste da razão temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| l < 1$$

logo, $|x| < \dfrac{1}{l} = R$, R é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Theorem 69. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências de x. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para um certo $c \neq 0$ e diverge para um certo $d \neq 0$ com $|c| < |d|$. Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x tal que $|x| < |c|$ e diverge para todo x tal que $|x| > |d|$.*

Demonstração. Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que ela converge para $x = c$ e diverge para $x = d$ com $|c| < |d|$. Considere x tal que $|x| < |c|$ temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n c^n| \left(\frac{|x|}{|c|}\right)^n$$

como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge então devemos ter que $lim_{n\to\infty}|a_n c^n| = 0$, podemos então tomar n_0 tal que $|a_n c^n| < 1$ para todo $n > n_0$ desse modo,

$$|a_n||x|^n = |a_n c^n| \left(\frac{|x|}{|c|}\right)^n < \left(\frac{|x|}{|c|}\right)^n, \ \ \forall n > n_0$$

como $|x| < |c|$ então $|\dfrac{x}{c}| < 1$ e a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{x}{c}\right|^n$ é uma série geométrica convergente. Desse modo, a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n||x|^n$ converge, o que implica que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo $|x| < |c|$. Agora suponha que x seja tal que $|x| > |d|$ se, por absurdo, supomos que exista algum x_1 com $|x_1| > |d|$ e $\sum a_n x_1^n$ convirja, então pelo que acabamos de mostrar essa série deve convergir para todo x tal que $|x| < |x_1|$ assim, como, $|d| < |x_1|$ então $\sum a_n d^n$ converge, o que é um absurdo. Então para todo x tal que $|x| > |d|$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge. □

Theorem 70. *Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potências de x. Então somente uma das alternativas abaixo deve ocorrer.*

1. *A série converge somente para $x = 0$ (R=0)*
2. *A série converge para todo x real. (R=∞)*
3. *Existe $R > 0$ tal que a série $\sum a_n x^n$ converge para todo x tal que $|x| < R$ e diverge para todo x tal que $|x| > R$.*

Demonstração. Se não ocorre a primeira nem a segunda situação então existe um $x_1 \neq 0$ onde $\sum a_n x_1^n$ converge e um $x_2 \neq 0$ com $|x_1| < |x_2|$ onde $\sum a_n x_2^n$ diverge. Seja

$$S = \{x \in \mathbb{R} | \sum a_n x^n \quad \text{converge}\}$$

é claro que $|x_2|$ é uma cota superior de S, tomemos então $R = \sup S$. Provemos que se $|x| < R$ então $x \in S$. De fato, se $|x| < R$ então x não pode ser cota superior de S já que R é a menor das cotas superiores, então deve ter um elemento x_0 de S tal que $|x| \leq |x_0|$ então pelo teorema anterior $x \in S$. Também se x não pertencesse a S então $\sum a_n x^n$ divergiria e x seria uma cota superior de S o que contradiz o fato de R ser a menor delas, já que $|x| < R$. Por outro lado, se $|x| > R$ então $\sum a_n x^n$ deve divergir, pois se $\sum a_n x^n$ convergisse R não seria uma cota superior de S o que é absurdo já que $R = \sup S$. □

R é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$. Já o **intervalo de convergência** da série é um dos seguintes intervalos:

$$(-R, R), \ (-R, R], \ [-R, R), \ [-R, R]$$

fora desses intervalos a série sempre diverge. E o intervalo $(-R, R)$ é sempre o intervalo de convergência absoluta da série.

Theorem 71. *Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potências de x. Se essa série tem raio de convergência R. Então ela pode ser derivada termo a termo ou integrada termo a termo, isto é,*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\right)$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

e

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

essas novas séries obtidas têm o mesmo raio de convergência da série original.

Example 72. *Obtenha uma série de potências de x que represente a função $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.*

Solução: Observe que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

como

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

usando o teorema 71 obtemos

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots \quad |x| < 1.$$

Example 73. *Obtenha uma série de potências de x que represente a função $\ln(1+x)$.*

Solução: Note que

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

como

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \ \ |t| < 1$$

o que nos leva a

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ \ |x| < 1$$

O intervalo de convergência dessa série é $(-1, 1]$. Isso, porque quando escolhemos $x = -1$ na série de $\ln(1+x)$ obtemos a série numérica $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ que é divergente, por outro lado, se fazemos $x = 1$ na série de $\ln(1+x)$ obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ que converge pelo teste de Leibniz.

Example 74. *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é absolutamente convergente para todo* x *real. Que função essa série representa?*

Solução:De fato,vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

então pelo teste da razão essa série converge absolutamente para todo x real. Suponha que a série acima represente uma função $f(x)$, ou seja, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Derivando a função $f(x)$ obtemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!}$$

ou

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

ou ainda

$$f'(x) = f(x)$$

daí

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

integrando a igualdade acima obtemos

$$\ln f(x) = x + c_0$$

ou

$$f(x) = Ce^x, \quad (C = e_0^c \text{ é uma constante})$$

como $f(0) = 1$ obtemos $C = 1$ e $f(x) = e^x$, portanto, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Uma série de potências de $x - x_0$ é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

Todos os resultados que obtivemos para as séries de potências de x são válidos para as séries de potências de $x - x_0$ com as devidas adaptações.

Example 75. *Da série*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ |x| < 1$$

obtemos

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \ |x| < 1$$

integrando termo a termo, de 0 *a* x *para* $|x| < 1$*, temos*

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

Example 76. *Considere a série* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{n+1}}{n}$ *analisemos sobre o intervalo de convergência dessa série.*

Solução: Usando o teste da razão

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+2}}{n+1} \frac{n}{(x-3)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x-3| \frac{n}{n+1} = |x-3|$$

essa série converge absolutamente se $|x - 3| < 1$, que equivale a $2 < x < 4$ e diverge fora desse intervalo. No caso em que $|x - 3| = 1$ que corresponde a $x = 2$ e $x = 4$, quando substituimos $x = 2$ nessa série obtemos $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ que converge e para $x = 4$ obtemos a série $\sum \dfrac{1}{n}$ que diverge. Logo, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{n+1}}{n}$ é o intervalo $2 \leq x < 4$.

3.2 Séries de Taylor

Quando uma função é representada por uma série de potências então podemos ter

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Levantamos então as seguintes questões: que relação há entre $f(x)$ e os coeficientes da série a_n? Em que situação essa série representa realmente a função $f(x)$? Em relação à primeira questão temos que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e se $f(x) \in C^\infty$ então $f(0) = a_0$ e, como $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ então $f'(0) = a_1$, como $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ então $f''(0) = 2! a_2$, e assim por diante, seguindo esse mesmo raciocínio obtemos $f^{(n)}(0) = n! a_n$ então podemos concluir que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

essa série é conhecida como **série de Maclaurin** da função f. A **série de Taylor** de f em torno de um ponto x_0 é

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

onde os $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, para todo $n \geq 0$, aqui usa-se a convenção de que $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. A série de Maclaurin de uma função f nada mais é que a sua série de Taylor em torno do ponto $x = 0$.

Example 77. *Achar a série de Maclaurin da função* $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solução: Temos que

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1 \\ f^{(iv)}(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{(iv)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases}$$

só os termos ímpares são diferentes de zero, analisemos esses termos

$$\begin{cases} f^{(1)}(0) = f^{(2.0+1)}(0) = (-1)^0 = 1 \\ f^{(3)}(0) = f^{(2.1+1)}(0) = (-1)^1 = -1 \\ f^{(5)}(0) = f^{(2.2+1)}(0) = (-1)^2 = 1 \\ \vdots \\ f^{(2.k+1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$$

assim

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Essa é a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Com a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ podemos encontrar a série de Maclaurin da função $f(x) = \cos x$, por derivação termo a termo,

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Example 78. *Encontre a série de Taylor da função* $\ln x$ *em torno de* $x = 1$.

Solução: Temos

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 \\ f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1 \\ f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2 \\ f^{(iv)}(x) = -\dfrac{3!}{x^4} \Rightarrow f^{(iv)}(1) = -3! \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{cases}$$

logo,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n} + \cdots$$

com $|x-1| < 1$.

3.2.1 Polinômios de Taylor

O **polinômio de Taylor** de uma função $f(x)$ em torno de $x = a$ é

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^k$$

O **polinômio de Maclaurin** de f é:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!}x^k$$

que é o polinômio de Taylor de f em torno do ponto $x = 0$. Por exemplo, o polinômio de Maclaurin de $f(x) = \exp x$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Theorem 79 (Fórmula de Taylor com resto)**.** *Seja $f(x)$ uma função de classe C^∞ num intervalo que contém a. Dado qualquer x nesse intervalo existe um número real ξ entre a e x tal que*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_n(x)$$

onde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n$, e

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Além disso, a sequência $P_{n,a}(x)$ converge para $f(x)$ quando $n \to \infty$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Demonstração. Considere a função $G : [a, x] \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(t) = f(x) - [f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n] - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}$$

com a e x fixos, onde $R_n(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$. Observe que G satisfaz as seguintes propriedades:

1. $G(a) = f(x) - P_{n,a}(x) - R_n(x) = 0$
2. $G(x) = 0$
3. G é contínua no intervalo fechado $[a, x]$ e derivável no intervalo aberto (a, x).

Logo, pelo teorema de Rolle existe um ξ tal que ξ está entre a e x tal que $G'(\xi) = 0$. Mas

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

e, portanto, $G'(\xi) = 0$ implica em $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n$.

Note que a soma parcial de ordem n da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ é $S_n = P_{n,a}(x)$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} P_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - R_n(x)] = f(x)$$

Logo,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

□

Example 80. *Mostre que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *realmente representa a função* $f(x) = e^x$ *para todo* x *real.*

Solução: Ja vimos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Falta mostrar que esta série realmente representa a função exponencial e^x. Pela Fórmula de Taylor com resto, temos que

$$e^x = P_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1} = \frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

onde ξ está entre 0 e x. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ então

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0.$$

Logo, realmente a série representa a função e^x.

Example 81. *Analise se a série da função* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *realmente a representa.*

Solução: Temos que

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1, \cdots .$$

Além disso,

$$f^{(n+1)}(\xi) = \begin{cases} \pm \operatorname{sen} \xi, & n \text{ par} \\ \pm \cos \xi, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

e o resto

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

e, $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ e portanto, a série do $\operatorname{sen} x$ representa essa função.

Remark 82. *Uma função $f(x)$ é **analítica** em $x = a$ quando ela puder ser representada por sua série de Taylor em algum intervalo aberto em torno de a.*

Um outro resultado que podemos deduzir da fórmula $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ é que se aproximarmos o valor de $f(x)$ por $P_n(x)$ o erro que cometemos é da ordem de $|R_n(x)|$.

Example 83. *Encontre o valor aproximado de $e^{-0.04}$ com erro menor que 5×10^{-4}.*

Solução: Temos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

se aproximarmos

$$e^{-0,04} \approx 1 - 0,04 + \frac{(0,04)^2}{2!}$$

então o erro que cometemos será de

$$|R_3(-0,04)| \leq \frac{|(-0,04)^3}{3!} \approx \frac{0,000064}{3!}.$$

3.2.2 Série Binomial

Binômio de Newton

$$(x+y)^k = x^k + kx^{k-1}y + \frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2}y^2 + \cdots + y^k$$

ou simbolicamente,

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j};$$

onde

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

fazendo nesta fórmula $y = 1$, obtemos

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}x^j + \cdots + x^k$$

Motivado por essa fórmula, procuramos um desenvolvimento em série de potências para a função $f(x) = (1+x)^\alpha$, onde α é um número real qualquer.A **série binomial** é definida como

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

o n-ésimo termo dessa série é

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\frac{|\alpha-n|}{n+1} = |x|$$

portanto, a série binomial converge absolutamente quando $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. Se tal série converge para uma função g então devemos ter que

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

e, por derivação termo a termo

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \cdots + \frac{n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1} + \cdots$$

desse modo,

$$g'(x) + xg'(x) = \alpha g(x)$$

ou

$$(1+x)g'(x) - \alpha g(x) = 0$$

daí

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}\right] = \frac{(1+x)g'(x) - \alpha g(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

ou

$$\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} = c$$

e como $g(0) = 1$ então $g(x) = (1+x)^\alpha$.

Example 84. *Ache a série binomial da função* $\sqrt{1+x}$.

Solução: Como $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ então

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots$$

Capítulo 4

Séries de Fourier

4.1 Introdução

As séries de Fourier são ferramentas muito importante na resolução de Equações Diferenciais Parciais. Podemos aplicá-las em diversas equações da Física-Matemática, principalmente nas equações de Onda, Calor e Laplace. Vamos desenvolver neste capítulo toda a teoria para calcular as séries de Fourier de algumas funções e depois aplicar o método desenvolvido para resolver as equações acima citadas.

4.2 Funções Periódicas

Definition 85. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é periódica de período* T *se* $f(x+T) = f(x)$ *para todo* x*.*

Example 86. *A função* $\operatorname{sen} x$ *é periódica de período* 2π*. Observe a figura 4.1.*

Example 87. *A função* $f(x) = x - [x]$*, onde* $[x]$ *representa o maior inteiro, menor do que ou igual a* x*,é periódica de período* 1*. Veja o gráfico de* f *dado pela figura 4.2.*

Observação:
Se T é um período para a função f, então $2T$ também é um período, pois:

$$f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$$

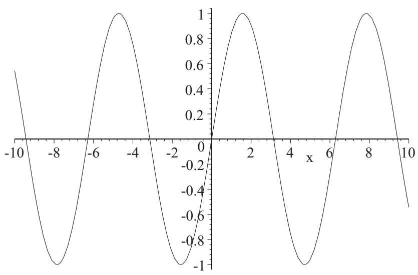


Figura 4.1: $y = \operatorname{sen} x$

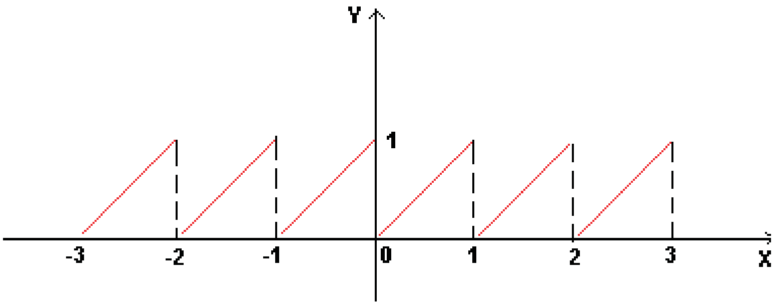


Figura 4.2: $f(x) = x - [x]$

E em geral, kT é um período, onde k é um inteiro. Para $k = 0$, temos que 0 é um período da f. Mas isso não tem interesse pois 0 é período de qualquer função. O menor período positivo é chamado o período fundamental.

Example 88. *O período fundamental T da função* $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ *pode ser determinado do seguinte modo. Devemos ter:*

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi(x+T)}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a seguinte propriedade trigonométrica, $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a$, *devemos ter:*

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{4.1}$$

Fazendo $x = \frac{L}{2n}$, *na igualdade acima obtemos:*

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

O que implica:

$$\cos\frac{n\pi T}{L}=1 \tag{4.2}$$

, e daí, usando a identidade: $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$, *obtemos:*

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi T}{L}=0 \tag{4.3}$$

Como estamos interessados no menor valor positivo de T *que satisfaça (4.2) e (4.3), simultaneamente, então* $\frac{n\pi T}{L}=2\pi$,*isto é, o período fundamental de* $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ *é:* $T=\frac{2L}{n}$. *(De maneira análoga obtemos que o período fundamental de* $\cos\frac{n\pi x}{L}$ *é também* $\frac{2L}{n}$.*)*

4.3 Coeficientes de Fourier

Se uma função $f(x)$ for expressa com:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.4}$$

é de se esperar que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente ligados à função f.

Vamos supor que a igualdade acima se verifique, e que a série em (4.4) convirja uniformemente.

Como consequência da Proposição 1, f deve ser contínua (e portanto, pode ser integrada termo a termo), e deve ser periódica de período $2L$ (pois o período fundamental de $\cos\frac{\pi x}{L}$ é $2L$, e $2L$ é período para as demais funções seno e co-seno que aparecem na série). Assim, usando a Proposição 2, podemos integrar ambos os lados de (4.4) para obter:

$$\int_{-L}^{L}f(x)\,dx=\frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx\right) \tag{4.5}$$

por outro lado,

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx=0$$

pois,

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{L}{n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi}\operatorname{sen}u\,du=-\frac{L}{n\pi}\left(\cos u\right)\Big]_{-n\pi}^{n\pi}=0$$

de modo análogo segue que

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

segue da igualdade (4.5) e do exposto acima que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}dx$$

segue que

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \tag{4.6}$$

Para calcularmos os demais coeficientes usamos as seguintes relações:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{L}dx = 0, \mathrm{se}\, n, m \geq 1 \tag{4.7}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\int_{-L}^{L} \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \tag{4.9}$$

por questões de esclarecimento vamos provar uma dessas relações, para $n = m \geq 1$ temos:

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L}{n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi}\cos^2 u du = \frac{L}{2n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi}(\cos 2u + 1)\,du$$

$$= \frac{L}{2n\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2u\right) + (u)\right]_{-n\pi}^{n\pi} = \frac{L}{2n\pi}[n\pi - (-n\pi)] = \frac{L}{2n\pi}[2n\pi] = L$$

Analogamente mostram-se as outras relações.

Agora, multiplicando (4.4) por $\cos\frac{m\pi x}{L}$, com $m \geq 1$ fixo, e integrando de $-L$ a L, obtemos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx\right)$$

Do somatório acima obtemos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$+(a_1\int_{-L}^{L}\cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + b_1\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + ...$$

$$+a_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + b_m\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + ...)$$

Usando as relações (4.7), (4.8) e (4.9) expostas acima concluímos que:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = 0 + (0 + ... + a_m L + b_m 0 + ... + 0 + ...)$$

o que nos dá

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = a_m L \tag{4.10}$$

De modo análogo, multiplicando (4.4) por $\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}$, com $m \geq 1$ fixo, e integrando de $-L$ a L, obtemos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx\right)$$

daí

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$+(a_1\int_{-L}^{L}\cos\frac{\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx + b_1\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx + ...$$

$$+a_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx + b_m\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx + ...)$$

Novamente das relações (4.7), (4.8) e (4.9) temos:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = 0 + (0 + ... + a_m 0 + b_m L + ... + 0 + ...)$$

segue que

$$\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L \tag{4.11}$$

Finalmente, de (4.6), (4.10) e (4.11) obtemos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0 \tag{4.12}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 1 \tag{4.13}$$

Definition 89. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular, $\int_{-L}^{L} |f(x)| dx < \infty$. Os números a_n, para $n \geq 0$, e b_n, para $n \geq 1$, dados em (4.12) e (4.13) são definidos como os coeficientes de Fourier da função f. (A exigência da integrabilidade e integrabilidade absoluta de f é necessária para que as expressões (4.12) e (4.13) façam sentido.)*

Obs.:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)| \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| dx \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

o que dá sentido à integral.

4.4 Série de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, que possa ser escrita na forma:

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \tag{4.14}$$

a expressão do lado direito é a série de Fourier de f.

Que relação há entre f e sua série de Fourier? Será que a igualdade sempre ocorre?

Vamos estudar as condições suficientes para que a função f seja igual à sua série de Fourier.

Definition 90. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < ... < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}), $j = 1, ..., n-1$, e existem os limites $f(a_j + 0) = \lim\limits_{x \to a_j^+} f(x)$ e $f(a_j - 0) = \lim\limits_{x \to a_j^-} f(x)$.*

Observação: Toda função contínua é seccionalmente contínua.

Example 91. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, *não é seccionalmente contínua, pois sua descontinuidade em $x = 0$ é de segunda espécie.*

Example 92. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ se \ x \geq 1 \\ \dfrac{1}{n}, \ se \ \dfrac{1}{n+1} \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \ n = 1, 2, ... \\ 0, \ se \ x \leq 0 \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, apesar de todas as descontinuidades serem de primeira espécie; acontece, porém, que, no intervalo $(0, 1)$, há um número infinito de tais descontinuidades.

Examples de funções seccionalmente contínuas:

Example 93. *A função sinal de x, definida por*

$$signx = \begin{cases} +1, \ se \ x > 0 \\ 0, \ se \ x = 0 \\ -1, \ se \ x < 0 \end{cases}$$

Example 94. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \ se \ x \geq 0; \\ 0, \ se \ x < 0. \end{cases}$$

Example 95. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ se \ 0 \leq x < \pi \\ 0, \ se \ -\pi \leq x < 0 \\ e \text{ periódica de período } 2\pi \end{cases}$$

Definition 96. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.*

Observe que a derivada f' não está definida em todos os pontos: com certeza $f'(x)$ não existe nos pontos x onde f é descontínua; e mais, $f'(x)$ pode não existir, mesmo em alguns pontos onde f é contínua.

Example 97. *As funções dos exemplos (93) - (**??**) anteriores saõ seccionalmente diferenciáveis. Vamos pegar o exemplo (94):*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \ se \ x \geq 0; \\ 0, \ se \ x < 0. \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, \ se \ x \geq 0; \\ 0, \ se \ x < 0. \end{cases}$$

Example 98. *A seguinte função é contínua, mas não seccionalmente diferenciável:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, \ se \ |x| \leq 1 \\ e \text{ periódica de período } 2 \end{cases}$$

pois nos pontos onde f' é descontínua, a descontinuidade é de segunda espécie, pois pela regra da cadeia, temos:$f = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f' = (-2x)\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, daí, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, que é descontínua em $|x| = 1$ com ela sendo de segunda espécie.

Agora enunciamos um resultado que fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f.

Theorem 99. *(Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Então a série de Fourier da função f, dada em (4.14), converge, em cada ponto x, para:*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.15)$$

Exercício 1 Calcular a série de Fourier da função f definida no exemplo 3 acima e traçar o gráfico da função definida por essa série. Compare esse gráfico com o gráfico da função.

Resolução:

Cálculo dos coeficientes: $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \Rightarrow$ onde o período da função é $2L$, daí,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) = \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1$$

para $n \neq 0$, temos:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, n \geq 0; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx,$$

daí,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos(nx)\,dx\right),$$

resolvendo a integral,temos:

$$\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{n\pi}\cos u\frac{du}{n}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} u}{n}\right]_{0}^{n\pi} = \frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(0)\right] = 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\operatorname{sen}(nx)\,dx\right),$$

de modo análogo para b_n, temos

$$\int_{0}^{\pi} 1\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{n\pi}\operatorname{sen} u\frac{du}{n} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos u}{n}\right]_{0}^{n\pi}$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(0)\right] = \frac{1}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right],$$

ou, para $k = 1, 2, ...$:

$$b_{2k} = \frac{1}{2k\pi}\left[1 - \cos(2k\pi)\right] = 0$$

e

$$b_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\,\pi}\left\{1-\cos\left[(2k-1)\right]\pi\right\} = \frac{2}{(2k-1)\,\pi} \tag{4.16}$$

A série de Fourier de f será:

$$f\,(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\,\pi}\,\mathrm{sen}\left[(2k-1)\,x\right]$$

Pelo Teorema de Fourier, o gráfico da função definida pela série é dado pela figura 4.3 abaixo.

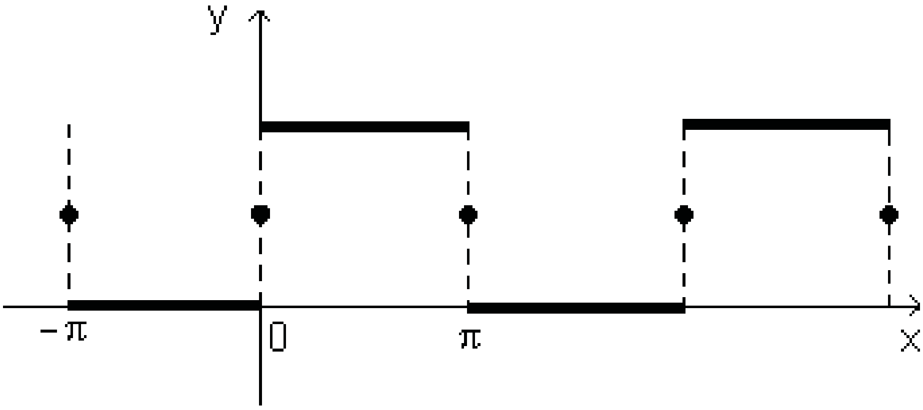


Figura 4.3: Gráfico da série de Fourier da função do exemplo 95

Exercício 2 Use os resultados do Exercício 1 para obter uma expressão em série para $\frac{\pi}{4}$.

Resolução: No ponto $x = \frac{\pi}{2}$, a série de Fourier é igual a 1, em virtude do Teorema de Fourier:

$$\frac{1}{2}\left[f\,(x+0) + f\,(x-0)\right] = \frac{1}{2}\left[1+1\right] = 1,$$

logo,

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\,\pi}\,\mathrm{sen}\left[(2k-1)\,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)}\,\mathrm{sen}\left[(2k-1)\,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen}\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right],$$

ou, finalmente,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)},$$

que é conhecida como uma série de alternada que converge pelo teste de Leibniz.

4.5 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Definition 100. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação ao eixo dos y).*

Definition 101. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação à origem).*

Example 102. *funções pares: $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$; $f(x) = x^{2n}$, para $n = 1, 2, ...$; outro: $f(x) = |x|$.*

Example 103. *funções ímpares: $f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$; $f(x) = x^{2n-1}$; para $n = 1, 2, ...$; outro: $f(x) = x$.*

Proposition 104.

1. *A soma de duas funções pares é uma função par*
2. *A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.*
3. *O produto de duas funções pares é uma função par.*
4. *O produto de duas funções ímpares é uma função par.*
5. *O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.*

Demonstração:
1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções pares

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$$

2 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções ímpares

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) + [-g(-x)] = -[f(-x) + g(-x)] = -(f+g)(-x)$$

3 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções pares:

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = f(-x)\,g(-x) = (fg)(-x)$$

4 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções ímpares:

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = [-f(-x)]\,[-g(-x)] = [f(-x)\,g(-x)] = (fg)(-x)$$

5 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar:

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = f(-x)\,[-g(-x)] = -[f(-x)\,g(-x)] = -(fg)(-x)$$

Proposition 105. (i) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então:*

$$\int_{-L}^{L} f = 2\int_{0}^{L} f$$

(ii) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado. Então:*

$$\int_{-L}^{L} f = 0$$

Demonstração:Seja f uma função par e considere a integral $\int_{-L}^{L} f = \int_{-L}^{0} f + \int_{0}^{L} f$, temos que para $y = -x$

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = -\int_{L}^{0} f(-y)\,dy = +\int_{0}^{L} f(-y)\,dy = \int_{0}^{L} f(y)\,dy.$$

isso mostra que se f é par então

$$\int_{-L}^{L} f = 2\int_{0}^{L} f$$

Analogamente, seja f uma função ímpar temos que $\int_{-L}^{L} f = \int_{-L}^{0} f + \int_{0}^{L} f$, e para $y = -x$ teremos

$$\int_{-L}^{0} f(x)\,dx = -\int_{L}^{0} f(-y)\,dy = +\int_{0}^{L} f(-y)\,dy = -\int_{0}^{L} f(y)\,dy.$$

que mostra

$$\int_{-L}^{L} f = 0$$

Da proposição anterior podemos estabelecer os seguintes resultados sobre as séries de fourier de funções pares e ímpares.

(a) Se f for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ n \geq 0,$$

pois o produto de duas funções pares é uma função par. E,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx = 0,\ n \geq 1,$$

pois o produto de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar.

Portanto, a série de Fourier de uma função par é uma série de co-senos.

(b) Se f for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0,$$

pois o produto de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar. E,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\textstyle\int_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx,$$

pois o produto de duas funções ímpares é uma função par.

Assim, a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos.

4.6 Cálculo de Algumas Séries de Fourier

I) Seja $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por $f_1(x) = x$, para $-L \leq x < L$. Como f_1 é ímpar, teremos uma série de senos cujos coeficientes são:

$$a_n = 0;\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

fazendo a mudança de variável $y = \dfrac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{n\pi} \frac{L}{n\pi} y \operatorname{sen}(y) \frac{L}{n\pi} dy = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y)\, dy.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y)\, dy &= [-y\cos y]_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos(y)\, dy \\ &= -n\pi\cos(n\pi) - (0) + [\operatorname{sen}(y)]_0^{n\pi} = -n\pi\cos(n\pi)\end{aligned}$$

Logo

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos(n\pi)\right) \Rightarrow b_n = \frac{2L}{n\pi}\left(-\cos(n\pi)\right),$$

como

$$\begin{cases} \text{para } n \text{ ímpar, } \cos(n\pi) = -1 \\ \text{para } n \text{ par, } \cos(n\pi) = 1 \end{cases}$$

então

$$b_n = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Portanto a série de Fourier da função f_1 é:

$$f_1(x) \sim \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} . \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

e seu gráfico é:

II) Seja $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} L - x, \text{ para } 0 \leq x \leq L; \\ L + x, \text{ para } -L \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Como f_2 é uma função par, temos uma série de cossenos, cujos coeficientes são:

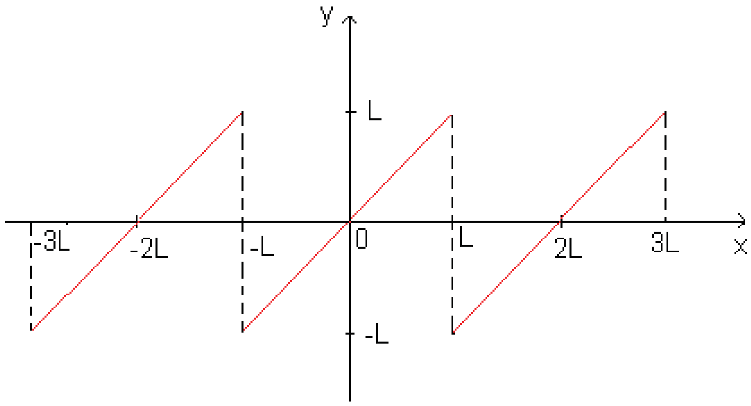


Figura 4.4: Gráfico da função f_1

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)\,dx = \frac{2}{L}\left[Lx - \frac{x^2}{2}\right]_0^L$$
$$= \frac{2}{L}\left(L^2 - \frac{L^2}{2}\right) - 0 = \frac{2}{L}\frac{L^2}{2} = L;$$

e

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

fazendo a mudança de variável $y = \dfrac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{n\pi}\left(L - \frac{L}{n\pi}y\right)\cos(y)\,\frac{L}{n\pi}dy$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^{n\pi} L\left(\frac{n\pi - y}{n\pi}\right)\cos(y)\,\frac{L}{n\pi}dy =$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi}(n\pi - y)\cos(y)\,dy$$

Integrando por partes a integral acima, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}(n\pi-y)\cos(y)\,dy &= [(n\pi-y)\operatorname{sen}(y)]_0^{n\pi}\\ -\int_0^{n\pi}-\operatorname{sen}(y)\,dy &= 0-0+[-\cos(y)]_0^{n\pi}\\ &= -\cos(n\pi)-(-\cos 0)\\ &= 1-\cos(n\pi),\end{aligned}$$

Logo,

$$a_n=\frac{2L}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

como

$$\begin{cases}\text{para } n \text{ ímpar, } \cos(n\pi)=-1\\ \text{para } n \text{ par, } \cos(n\pi)=1\end{cases}$$

então

$$a_n=\frac{2L}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

ou seja,para $n=2k$, temos: $a_{2k}=0$, $k=1,2,...$ e para $n=2k-1$, temos:

$$a_{2k-1}=\frac{2L}{(2k-1)^2\pi^2}\left[1-(-1)\right]\Rightarrow a_{2k-1}=\frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2},\ k=1,2,...$$

Portanto a série de Fourier da função f_2 é:

$$f_2(x)\sim\frac{L}{2}+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.\cos\frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

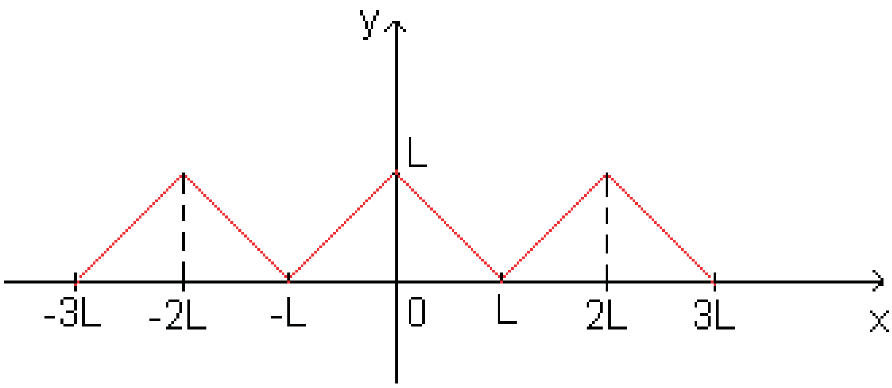
gráfico da função f_2 :

Observe que, em virtude do Teorema de Fourier, o símbolo $\sim$ pode ser substituído por $=$. Usando o Teorema de Fourier, para $x=0$, obtemos:

$$L-0=\frac{L}{2}+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{L}{2}=\frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\Rightarrow\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...$$



III) Seja $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de príodo $2L$ e definida por $f_3(x) = x^2$ para $-L \leq x \leq L$. Como f_3 é par, teremos uma série de cossenos cujos coeficientes são:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{2}{L}\left(\frac{L^3}{3}\right) - 0 = 2\frac{L^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi x}{L} dx.$$

fazendo a mudança de variável $y = \dfrac{n\pi x}{L}$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^{n\pi} \left(\frac{L}{n\pi} y\right)^2 \cos(y) \frac{L}{n\pi} dy = \\ &= \frac{2}{L}\frac{2L^3}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi} y^2 \cos(y)\, dy = \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi} y^2 \cos(y)\, dy \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y)\, dy &= \left[y^2 \operatorname{sen}(y)\right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 2y \operatorname{sen}(y)\, dy \\ &= 0 - 0 - \int_0^{n\pi} 2y \operatorname{sen}(y)\, dy, \end{aligned}$$

daí,

$$a_n = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y)\, dy$$

Integrando novamente por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y)\, dy &= [-y\cos(n\pi)]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} -\cos y dy \\ &= -n\pi\cos(n\pi) - 0 + [\operatorname{sen} y]_0^{n\pi} \\ &= -n\pi\cos(n\pi)\end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3}\left[-n\pi\cos(n\pi)\right] = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}\left[\cos(n\pi)\right] = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

Portanto a série de Fourier da função f_3 é:

$$f_3(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

O gráfico da função f_3 é dado pela figura 4.5.

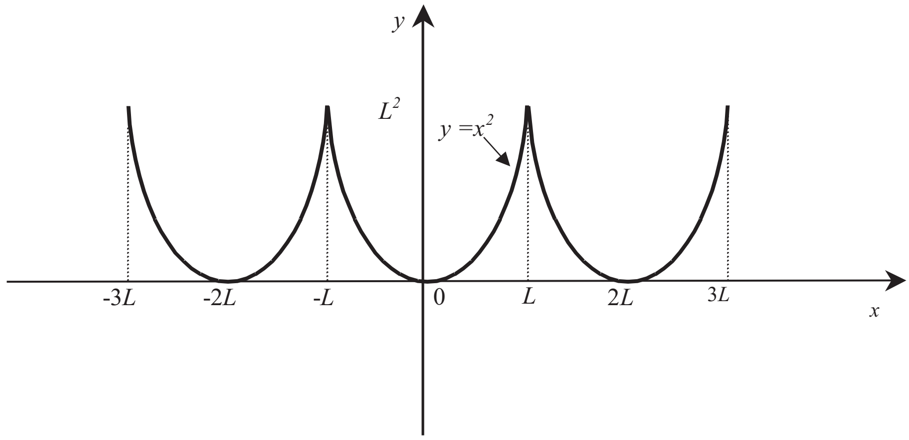


Figura 4.5: Gráfico da função f_3

Observe que, de fato, tem-se = em vez de $\sim$, como consequência do teorema de Fourier. Usando o Teorema de Fourier para $x = L$, obtemos:

$$L^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

pois $(-1)^n$ e $\cos n\pi$ sempre terão o mesmo sinal e assim, pela multiplicação dos dois termos, sempre teremos $+1$.

Ou seja,

$$L^2 - \frac{L^2}{3} = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{2L^2}{3} = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$$

Capítulo 5

Equações Diferenciais Ordinárias

5.1 Introdução

Este primeiro capítulo é uma revisão das equações diferenciais lineares de 1^a e 2^a ordem, oferecemos aqui uma noção do que seja uma equação diferencial e algumas técnicas para resolver alguns problemas simples.

5.2 Equações Diferenciais de 1^a ordem

Uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem é uma equação do tipo

$$y' = f(x, y) \tag{5.1}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$, é uma função dada e $\Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}$ é um conjunto aberto; x é uma variável independente, pertencente ao intervalo (a, b), com a, b números reais $a < b$; e $y = y(x)$ é a variável que depende de x. Qualquer função $y = \phi(x)$ que satisfaça a edo (5.1) é dita solução dessa equação. Isto é, se $y = \phi(x)$ é solução então ela satisfaz

$$\frac{d\phi}{dx} = f(x, \phi(x)), \;\; a \leq x \leq b. \tag{5.2}$$

Podemos impor uma condição inicial para essa equação, qual seja,

$$y(x_0) = y_0, \tag{5.3}$$

quando consideramos a equação diferencial (5.1) junto com a condição inicial (5.3) então dizemos que se trata um problema de Cauchy. Condições são colocadas sobre a função f de modo que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in (a,b) \\ y(x_0) = y_0, \ x_0 \in (a,b), \ y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.4}$$

tenha uma única solução. À priori, a nossa função f pode ser qualquer função de duas variáveis. Mas para se garantir existência de soluções da equação diferencial (5.1) f teria de ser no mínimo contínua. Há dois teoremas importantes sobre existência de soluções que enunciamos a seguir.

Theorem 106 (Picard)**.** *Se f de $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas num domínio retangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ então há um intervalo $|x - x_0| \leq h < a$ no qual existe uma única solução $y = \phi(x)$ satisfazendo a equação diferencial (5.1) e as condições iniciais (5.3).*

Theorem 107 (Peano)**.** *Se f é contínua num domínio retangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| < a, |y-y_0| < b\}$ então há um intervalo $|x-x_0| \leq h < a$ no qual existe pelo menos uma solução $y = \phi(x)$ satisfazendo a equação diferencial (5.1) e as condições iniciais (5.3). Mas nesse caso, não se garante unicidade.*

Por exemplo, dada a equação diferencial ordinária

$$y' = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

então $y = \frac{x^4}{16}$ é solução dessa equação, pois, $y' = \frac{x^3}{4}$ e $xy^{1/2} = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x.x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$. Note que essa solução não é única, já que $y = 0$ é também uma solução da equação diferencial junto com as condições iniciais.

Example 108. *A relação $x^2 + y^2 = 25$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{5.5}$$

no intervalo $-5 \leq x \leq 5$.

De fato, por diferenciação implícita, temos

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}(25)$$

ou

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Além disso, resolvendo $x^2 + y^2 = 25$ para y em termos de x obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ as duas funções $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ são soluções explícitas da edo (5.5) no intervalo $-5 \leq x \leq 5$.

No caso mais simples em que a função f é linear em relação a variável y a nossa equação diferencial de 1^a ordem se apresenta na forma

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x) \tag{5.6}$$

onde α e β são funções reais quaisquer definidas no intervalo (a, b). Se supomos que α e β são funções contínuas em (a, b) então esta equação tem uma resolução bem simples, pois se consideramos primeiro a equação linear homogênea associada à equação (5.6), isto é,

$$y' = \alpha(x)y \tag{5.7}$$

podemos escrever tal equação na forma

$$\frac{y'}{y} = \alpha(x)$$

integrando em x temos

$$\ln y = \int^x \alpha(s)ds + c_1,$$

onde c_1 é uma constante arbitrária, segue que

$$y(x) = Ce^{\int^x \alpha(s)ds} \tag{5.8}$$

é uma solução da equação homogênea (5.7) com $C = e^{c_1}$. Usando agora o método de variação dos parâmetros para y dada em (5.8) temos

$$y' = C'e^{\int^x \alpha(s)ds} + C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds}$$

substituindo tal resultado em (5.6) obtemos

$$C'e^{\int^x \alpha(s)ds} + C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds} = C\alpha(x)e^{\int^x \alpha(s)ds} + \beta(x)$$

segue que

$$C'e^{\int^x \alpha(s)ds} = \beta(x)$$

o que nos dá

$$C' = \beta(x)e^{-\int^x \alpha(s)ds}$$

daí

$$C = C_0 + \int^x \beta(s)e^{-\int^s \alpha(t)dt}ds \tag{5.9}$$

onde C_0 é uma constante arbitrária. Logo, y dada por

$$y(x) = Ce^{\int^x \alpha(s)ds} \tag{5.10}$$

onde C é definida em (5.9) é a solução geral de (5.6).

Vejamos alguns modelos matemáticos de algumas edos que podem ser físicos, biológicos, químicos, etc.

Crescimento Populacional

Modelo de Malthus

Se P representa a população numa certa região num determinado instante t então

$$\frac{dP}{dt} = kP \ (k \text{ constante de proporcionalidade})$$

Modelo de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = (r - aP)P$$

onde r e a são constantes.

Decaimento Radioativo

A taxa $\frac{dA}{dt}$ a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade $A(t)$ da substância remanescente no instante t

$$\frac{dA}{dt} = kA \ (k < 0)$$

Remark 109. *Uma única equação diferencial pode servir como modelo matemático para vários fenômenos diferentes. Modelos matemáticos são frequentemente acompanhados por determinadas condições laterais. Por exemplo para o modelo de crescimento populacional esperaríamos conhecer a população inicial P_0 e no modelo de decaimento radiativo a quantidade inicial da substância radioativa.*

Lei de Resfriamento de Newton

De acordo com a Lei empírica de Newton do resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada de temperatura ambiente. Nesse caso, se T é a temperatura do corpo e T_m é temperatura do meio ambiente então

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \ (k < 0).$$

Disseminação de uma doença

Uma doença contagiosa espalha-se numa comunidade através do contato entre as pessoas. Seja $x(t)$ o número de pessoas que contraíram a doença e

$y(t)$ o número de pessoas que ainda não foram expostas. É razoável supor que a taxa $\frac{dx}{dt}$ segundo a qual a doença se espalha seja proporcional ao número de encontros ou interações entre esses dois grupos de pessoas. Se supormos que o número de interações é proporcional ao produto xy então

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

k é a constante de proporcionalidade. Se a comunidade tem uma população fixa de N pessoas. O número de y é $y = N - x$. Assim

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

se no instante inicial haviam x_0 pessoas infectadas então $x(0) = x_0$.

Misturas

No instante $t = 0$, um tanque contém Q_0 kg de sal dissolvido em V_0 litros de água. Uma solução de sal em água com Q_1 kg de sal por litro entra no tanque a uma razão de v litros por minuto e a solução do tanque, bem misturada, sai a mesma razão. Seja $Q(t)$ a quantidade de sal no tanque num instante t. A taxa de variação da quantidade de sal no tanque, no instante t, $\frac{dQ}{dt}$, é igual à taxa na qual o sal entra no tanque, menos a taxa na qual o sal sai do tanque. Logo,

$$\frac{dQ}{dt} = vQ_1 - \frac{v}{v_0}Q(t).$$

Mecânica

A lei do movimento de Newton diz que

$$F = ma$$

F é a força externa, m é massa, a é a aceleração. Para um corpo que cai livremente num vácuo, e bastante próximo da terra, temos que

$$w = mg$$

onde w é o peso do corpo, m é massa do corpo e g é a aceleração da gravidade. Mesmo que a massa do corpo permaneça constante, seu peso, e a aceleração da gravidade, alteram-se com a distância ao centro do campo gravitacional da terra. Para um corpo muito distante da terra

$$w = \frac{k}{(R + x)^2},$$

k constante. Em $x = 0$, temos que $w = mg$ então $k = mgR^2$ e, portanto,

$$w = \frac{mgR^2}{(R + x)^2}.$$

5.3 Equações Diferenciais de 2^a Ordem

Uma equação diferencial de 2^a ordem, na forma mais geral, é uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{5.11}$$

onde x é a variável independente, e $y = y(x)$ é a variável dependente, aqui $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $F(x, y, t, w)$ é uma função dada. Em muitas situações de muitos problemas de aplicações (na física, na matemática, etc.) a equação (5.11) se apresenta na seguinte forma

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{5.12}$$

Theorem 110. *Se as funções f, f_y e f_v são contínuas numa região aberta R do espaço tri-dimensional xyv e se o ponto (x_0, y_0, y_0') está em R, então em algum intervalo em torno de x_0, existe uma única solução $y = \phi(x)$ da equação diferencial (5.12) que satisfaz as condições iniciais*

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0'. \tag{5.13}$$

A equação geral linear de segunda ordem pode ser dada no seguinte modo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x), \tag{5.14}$$

onde P, Q, R e G são funções dadas.

Example 111. *Equação de Legendre de ordem α*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

Example 112. *Equação de Bessel de ordem ν*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Supondo P, Q, R e G contínuas num certo intervalo $\alpha < x < \beta$, e que P nunca se anula no intervalo, podemos dividir a equação (5.14) por $P(x)$ e obter uma equação da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{5.15}$$

Theorem 113. *Se as funções p, q e g são contínuas num intervalo $\alpha < x < \beta$, então existe uma e somente uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial (5.15) e as condições iniciais (5.13).*

5.4 Soluções Fundamentais

A equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.16}$$

é a equação homogênea associada à equação (5.15).

Theorem 114. *Se $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ são soluções da equação diferencial (5.16) então $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, ($c_1$ e c_2 constantes arbitrárias) é também solução de (5.16).*

Duas soluções y_1 e y_2 de (5.16) formarão um conjunto fundamental de soluções se toda solução de (5.16) puder ser escrita como combinação linear de y_1 e y_2. O Wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \tag{5.17}$$

se $W(y_1, y_2) \neq 0$ então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de solução de (5.16). Isto quer dizer que as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes e toda solução de (5.16) se escreve como combinação linear dessas duas soluções.

5.5 Equações diferenciais com coeficientes constantes

Na equação diferencial (5.14) se fazemos $P(x) = a$, $Q(x) = b$, $R(x) = c$ e $G(x) = 0$, com a, b e c constantes reais então ela se transforma na seguinte equação:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5.18}$$

É natural considerar uma solução de (5.18) na forma:

$$y = e^{\alpha x} \tag{5.19}$$

com α sendo uma constante a determinar. Derivando y dada por (5.19) em relação a x, temos

$$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$$
$$y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

Substituindo os valores de y, y' e y'' em (5.18) obtemos:

$$a\alpha^2 e^{\alpha x} + b\alpha e^{\alpha x} + ce^{\alpha x} = 0$$

que resulta na seguinte igualdade:

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)e^{\alpha x} = 0$$

Como $e^{\alpha x}$ é sempre diferente, devemos ter que:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{5.20}$$

A equação (5.20) é conhecida como equação característica associada à equação (5.18). Temos então três casos a considerar: as raízes α de (5.20) são reais e distintas, elas são reais e iguais ou são complexas conjugadas. Quando forem reais e distintas, isto é, α_1 e α_2 satisfazendo a equação (5.20) então temos duas soluções linearmente independentes da equação (5.18), dadas por:

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}.$$

Essas duas soluções formam um conjunto fundamental de soluções da equação (5.18) e, portanto, a solução geral dessa equação é dada pela combinação linear dessas duas soluções, ou seja, y dada por

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} \tag{5.21}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, é a solução geral da equação (5.18). Se as raízes forem iguais, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2$ então uma solução é da forma $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ e a outra solução linearmente independente com essa é dada por $y_2 = xe^{\alpha_2 x}$ que é encontrada usando o método de variação dos parâmetros. Logo a solução geral da equação (5.18) nesse caso, é dada por:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_2 x} \tag{5.22}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. No caso complexo, uma das raízes sendo da forma $\alpha_1 = r_1 + ir_2$ uma solução complexa é da forma

$$y = e^{r_1 + ir_2 x} \tag{5.23}$$

Se queremos as duas soluções reais linearmente independentes da equação (5.18), para esse caso, basta tomar y_1 como sendo a parte real de (5.23) e y_2 como sendo a parte imaginária (5.23), ou seja,

$$y_1 = \cos(r_2 x)e^{r_1 x}, \quad y_2 = \operatorname{sen}(r_2 x)e^{r_1 x} \tag{5.24}$$

E a solução geral de (5.18) é dada por

$$y = c_1 \cos(r_2 x)e^{r_1 x} + c_2 \operatorname{sen}(r_2 x)e^{r_1 x} \tag{5.25}$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Quando estamos resolvendo uma equação diferencial do tipo (5.18) satisfazendo condições iniciais então podemos determinar as constantes c_1 e c_2, ou seja, elas deixam de ser arbitrárias.

Example 115. *Considere a equação diferencial*

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{5.26}$$

com os dados iniciais dados por

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{5.27}$$

A equação característica associada à equação (5.35) é dada por

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \tag{5.28}$$

cujas raízes são

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3 \tag{5.29}$$

Logo a solução geral de (5.35) é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \tag{5.30}$$

Como queremos que essa solução satisfaça as condições iniciais (5.27) devemos ter:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) &= 2c_1 + 3c_2 = 2 \end{aligned}$$

resolvendo o sistema acima, obtemos, $c_1 = 1$ *e* $c_2 = 0$*. Logo, a única solução da equação (5.35) que satisfaz as condições iniciais (5.27) é* $y = e^{2x}$*.*

Example 116. *Considere a equação diferencial*

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \tag{5.31}$$

A equação característica associada à equação (5.35) é dada por

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \tag{5.32}$$

cuja raíz é

$$r_1 = r_2 = 3 \tag{5.33}$$

Logo a solução geral de (5.35) é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \tag{5.34}$$

Example 117. *Considere a equação diferencial*

$$y'' + y = 0 \tag{5.35}$$

A equação característica associada à equação (5.35) é dada por

$$r^2 + 1 = 0 \tag{5.36}$$

cujas raízes complexas são

$$r_1 = i, \quad r_2 = -i \tag{5.37}$$

Logo a solução geral de (5.35) é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x. \tag{5.38}$$

5.6 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares com condições iniciais dadas:

   (a) $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 2.$

   (b) $y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$

2. Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo:

   (a) $y'' - y' + y = 0,$

   (b) $y'' + 3y = 0,$

   (c) $y'' - 9y = 0.$

3. Mostre que as equações abaixo tem duas soluções linearmente independentes e calcule o Wronskiano de cada uma delas:

   (a) $y'' + y' + 2y = 0,$

   (b) $y'' + 4y = 0,$

   (c) $y'' - 8y = 0.$

4. Considere o *problema não homogêneo* abaixo:

$$ay'' + by' + cy = g, \tag{5.39}$$

onde a, b, c e g são funções de x diferenciáveis. Suponha que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes do problema homogêneo associado ao problema (5.39):

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{5.40}$$

Considere uma solução particular de (5.39) dada por

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{5.41}$$

onde c_1 e c_2 são funções de x. Use o método de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular y_p de (5.39). Ou seja, suponha que $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$, derive (5.41) para obter y_p' e y_p'' substitua esses valores em (5.39) para obter o sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \dfrac{g}{a} \end{cases} \tag{5.42}$$

Resolva esse sistema para c_1 e c_2 e encontre a solução particular y_p dada por (5.41) onde c_1 e c_2 são soluções de (5.42). Logo a solução geral do problema (5.39) é dada por

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

5. Aplique o método de variação dos parâmetros do exercício anterior para determinar a solução geral dos problemas não homogêneos abaixo:

   (a) $y'' + y = \operatorname{sen} x$,

   (b) $y'' - 3y' + y = e^t$,

   (c) $y'' - 2y' + 4y = \tan x$.