

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Disciplina: Introdução à Matemática Aplicada
Professor: Milton
Aluno:-----

Turno: Manhã
Data: 16/06/2006

1ª Lista de Exercícios

1. Nos problemas abaixo determinar se f é contínua, ou contínua por partes ou nem uma coisa nem outra, no intervalo $0 \leq t \leq 3$

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} & \text{b) } f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \\ \text{c) } f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases} & \text{d) } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3-t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \end{array}$$

2. Achar a Transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções:

(a) t (b) t^2 (c) t^n , com n inteiro e positivo.

3. Lembrar que $\cosh bt = \frac{(e^{bt} + e^{-bt})}{2}$ e $\sinh bt = \frac{(e^{bt} - e^{-bt})}{2}$. Nos problemas abaixo, achar a Transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

4. Das funções abaixo descritas quais as que são contínuas por partes em $[0, \infty)$? Justifique sua resposta.

$$\text{(a) } e^{t^2} \quad \text{(b) } \ln(t^2 + 1) \quad \text{(c) } \frac{t+1}{t-1} \quad \text{(d) } \frac{t-2}{t^2-t-2} \quad \text{(e) } e^{1/t}.$$

5. O limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \sin \frac{1}{t})$ existe? $t \sin \frac{1}{t}$ é contínua por partes em $[0, \infty)$?

6. Determine a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções. Suponha que a é sempre constante.

- (a) $\sin(t+a)$ (b) $(t+a)^n, n \in \mathbb{Z}^+$ (c) $\sinh at$
 (d) $t^2 e^{at}$ (e) $\sin^2 at$ (f) $t^2 \cos t$.

7. Mostre que

$$\mathcal{L}[\cos^3 t] = \frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 9)(s^2 + 1)}.$$

8. Calcule $\mathcal{L}[e^t \sin t]$. (Sugestão: Aplique a fórmula de derivação.)

9. Resolva cada um dos seguintes problemas de valores iniciais, usando a transformada de Laplace.

- (a) $y'' - 3y' + 2y = 0; y(0) = 3, y'(0) = 4$.
 (b) $y'' + y = t; y(0) = -1; y'(0) = 3$.
 (c) $y''' + y'' + 4y' + 4y = -2; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$.
 (d) $y'' - y' - 6y = 3t^2 + t - 1; y(0) = -1, y'(0) = 6$.

10. Nos problemas abaixo achar a transformada de Laplace Inversa.

- (a) $\frac{s}{s^2 + 4}$ (b) $\frac{s}{(s-1)^3}$ (c) $\frac{2}{s^2 + 3s - 4}$ (d) $\frac{2s - 3}{s^2 + 2s + 10}$.

11. Achar a solução do problema de valor inicial proposto, mediante as transformadas de Laplace.

a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), y(0) = 1, y'(0) = 0$.

b) $y'' + 2y'y = \delta(t) + u_{2\pi}, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

c) $y'' + y = \delta(t - \pi) \cos t, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

12. (a) Mostrar, pelo método da variação dos parâmetros, que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 2y + 2y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

é

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau.$$

(b) Mostrar que se $f(t) = \delta(t - \pi)$, então a solução da parte (a) se reduz a

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t - \pi).$$

13. Provar as propriedades comutativa, distributiva e associativa da integral de convolução

$$(a) f * g = g * f \quad (b) f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (c) f * (g * h) = (f * g) * h.$$

14. Mostrar mediante o exemplo com $f(t) = \operatorname{sen} t$, que $f * f$ não é necessariamente não-negativo.

15. Nos problemas abaixo, achar a transformada de Laplace da função dada.

$$(a) f(t) = \int_0^t (t - \tau)^2 \cos 2\tau d\tau \quad (b) f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} \tau d\tau$$

$$(c) f(t) = \int_0^t (t - \tau) e^\tau d\tau \quad (d) f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t - \tau) \cos \tau d\tau.$$

16. Nos problemas abaixo, achar a transformada de Laplace inversa dada, mediante o teorema de convolução.

$$(a) F(s) = \frac{1}{s^4(s^2 + 1)} \quad (b) F(s) = \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 4)} \quad (c) F(s) = \frac{1}{(s + 1)^2(s^2 + 4)}.$$

17. Expressar a solução do problema de valor inicial em termos de uma integral de convolução.

$$(a) y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} \alpha t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$(b) y''y' + \frac{5}{4}y = 1 - u_\pi(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$(c) y'' + 3y' + 2y = \cos \alpha t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

18. Consideremos a equação integral

$$\phi(t) + \int_0^t (t - \psi) \phi(\psi) d\psi = \operatorname{sen} 2t$$

(a) Mostrar que se u for tal que $u''(t) = \phi(t)$, então

$$u''(t) + u(t) - tu'(0) - u(0) = \operatorname{sen} 2t.$$

(b) Mostrar que a equação integral dada é equivalente ao problema de valor inicial

$$u''(t) + u(t) = \sin 2t, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

(c) Resolver a equação integral mediante a transformada de Laplace.

(d) Resolver o problema em (b) e verificar que a solução é a mesma que obtida em (c).