

4. Campos Vetoriais



4.1 Curvas Regulares

4.1A Esboce o gráfico de cada curva dada abaixo, indicando a orientação positiva.

(a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$ (b) $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $-1 \leq t \leq 0$

(c) $\vec{r}(t) = (1/t)\vec{i} + t\vec{j}$, $1 \leq t < \infty$ (d) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sqrt{1-t^2}\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$

(e) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \ln t\vec{j}$, $1 \leq t \leq e$ (f) $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

4.1B Duas parametrizações para o círculo.

Considere a circunferência $c : x^2 + y^2 = 2x$, percorrida no sentido positivo (anti-horário), como na figura ao lado. Parametrize a curva c de duas maneiras: primeiro utilize o parâmetro t e, depois, o parâmetro θ . Calcule a integral da função xy ao longo da curva c , usando as duas parametrizações encontradas. [resp. 3π].

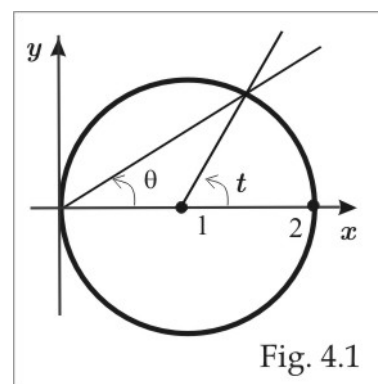


Fig. 4.1

4.1C Um caminho não regular. Seja γ o caminho dado por: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2 \sin(1/t)\vec{j}$, $0 < t \leq 1$, e $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Note que a coordenada y do caminho γ é:

$$y(t) = \begin{cases} t^2 \sin(1/t), & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

com derivada $y'(t) = 2t \sin(1/t) - \cos(1/t)$, para $0 < t \leq 1$ e $y'(0) = 0$. Sendo esta derivada descontínua em $t = 0$, concluímos que o caminho não é regular.

4.1D Calcule o comprimento da hélice do Exercício 1.1(f). [resp. $2\sqrt{2}\pi$]

4.1E Considere o caminho $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, sendo γ_1 descrito por $\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$ e γ_2 por $\vec{r}_2(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Esboce o caminho c e verifique que o mesmo é simples e parcialmente regular. Determine o vetor velocidade onde existir.

4.1F Considere o caminho $\gamma_1 : \vec{r}_1(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j}$, $1 \leq t \leq 2$, e seja γ_2 o caminho definido por $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(3-t)$, $1 \leq t \leq 2$. Esboce os gráficos de c_1 e c_2 . Qual a relação entre esses dois caminhos?

4.2 Integral de Linha

2.2A Seja $f(x, y)$ uma função contínua sobre um caminho regular c de comprimento L . Se $|f(x, y)| \leq M$, em todos os pontos (x, y) do caminho c , mostre que:

$$\left| \int_{\gamma} f(x, y) ds \right| \leq ML.$$

4.2B Calcule as seguintes integrais de linha ao longo do caminho indicado:

- (a) $\int_{\gamma} 2ydx - 3xdy$; $\gamma : x = 1 - t, y = 5 - t; 0 \leq t \leq 1$. [resp. $-15/2$]
- (b) $\int_{(-1,1)}^{(1,1)} xydx - y^2dy$; ao longo da parábola $y = x^2$. [resp. 0]
- (c) $\int_{(3,-1)}^{(4,-2)} \frac{y}{x} dx - \frac{x}{y} dy$; ao longo da reta $y = 2 - x$. [resp. $\ln(4/9) - 2$]
- (d) $\oint_{\partial D} ydx + 2xdy$; $D : x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y, y \geq 0$. [resp. $\pi/4$]
- (e) $\int_{\gamma} xyds$; $c : x = t, y = t; 0 \leq t \leq 1$. [resp. $\sqrt{2}/3$]
- (f) $\int_{\gamma} x^2 ds$; $\gamma : x = \cos 2t, y = \sin 2t; 0 \leq t \leq 2\pi$. [resp. 2π]
- (g) $\oint_c ydx + 2xdy$; γ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. [resp. $1/2$]
- (h) $\oint_{\gamma} (x^2 - y^2) ds$; $\gamma : x^2 + y^2 = 4$. [resp. 0]
- (i) $\int_{(0,-1)}^{(0,1)} y^2 dx + x^2 dy$; ao longo do semicírculo $x = \sqrt{1 - y^2}$. [resp. $4/3$]
- (j) $\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$; ao longo da curva $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq \pi/2$. [resp. $-\pi/2$]
- (k) $\oint_{\gamma} (ax + by) dx + (\alpha x + \beta y) dy$; $\gamma : x^2 + y^2 = 4$. [resp. $4\pi(\alpha - b)$]
- (l) $\oint_{\gamma} xy(3ydx + 7xdy)$; $\gamma : 9x^2 + 4y^2 = 36$. [resp. 0]

- (m) $\oint_{\gamma} xydx + (y^2 - x^2) dy$; γ consiste dos arcos $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$. [resp. $-9/20$]
- (n) $\int_{\gamma} (x + y + z) dx + (x - 2y + 3z) dy + (2x + y - z) dz$; γ é o caminho que liga a origem ao ponto $A(2, 3, 4)$, através de três segmentos retilíneos: o primeiro uma porção do eixo x , o segundo paralelo ao eixo y e o terceiro paralelo ao eixo z . [resp. 19]

4.2C Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, nos seguintes casos:

- (a) $\vec{F} = (x^2 + y^2) \vec{i} + 3xy^2 \vec{j}$; γ é o círculo $x^2 + y^2 = 9$. [resp. $243\pi/4$]
- (b) $\vec{F} = (3x^2 - 8y^2) \vec{i} + (4y - 6xy) \vec{j}$; γ é a fronteira da região $D : x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$. [resp. $40/3$]
- (c) $\vec{F} = xy \vec{i} - y \vec{j} + \vec{k}$; γ é o segmento de reta ligando a origem ao ponto $A(1, 1, 1)$. [resp. $5/6$]
- (d) $\vec{F} = y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j}$; γ é o arco da parábola $x = t, y = t^2, z = 0$; $1 \leq t \leq 2$. [resp. $137/10$]
- (e) $\vec{F} = z^2 \vec{i} + x^2 \vec{k}$; γ é o segmento de $(1, 0, 1)$ a $(2, 0, 1)$, seguido do segmento de $(2, 0, 1)$ a $(2, 0, 4)$. [resp. 13]

4.2D Considere as funções $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, definidas para $(x, y) \neq (0, 0)$ e seja D a região descrita por $0 < x^2 + y^2 \leq R$.

- (a) Mostre que $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = 2\pi$;
- (b) Mostre que $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$;

4.2E Calcule $\int_{\gamma} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 2$, seguido do segmento de reta que une os pontos $(2, 3)$ e $(-1, 0)$. [resp. 0]

4.2F Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ e θ é o ângulo entre o campo $\vec{F}$ e $d\vec{r}$, mostre que:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cos \theta ds.$$

4.2G Considere os caminhos $\gamma_1 : \vec{r}(t) = t \vec{i} + t^3 \vec{j}, -1 \leq t \leq 1$ e $\gamma_2 : \vec{r}(\xi) = (1 - \xi) \vec{i} + (1 - \xi)^3 \vec{j}, 0 \leq \xi \leq 2$. Se $\vec{F}$ é um campo contínuo em uma região contendo esses caminhos, mostre que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

De que forma pode-se generalizar esse fato?

4.3 O Teorema de Green no Plano

4.3A No Exercício 2.2 identifique as integrais de linha que podem ser calculadas diretamente com o Teorema de Green. O cálculo das integrais tornou-se mais simples? Qual dificuldade você enfrenta ao usar o Teorema de Green?

4.3B Com auxílio do Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\oint_{\gamma} (\sin x + 4xy) dx + (2x^2 - \cos y) dy = 0$; γ é um contorno simples fechado e regular [resp. 0];

(b) $\oint_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy$; γ é um contorno simples, regular e fechado, que não envolve a origem [resp. 0];

(c) $\oint_{\gamma} 2dx + (x^2 - y \operatorname{tg} y) dy$; $c: (x-1)^2 + y^2 = 1$. [resp. 2π];

(d) $\oint_{\gamma} P(x) dx + Q(y) dy$; γ é um círculo de raio r e $P(x)$ e $Q(y)$ são de funções classe C^1 na região delimitada pela curva c . [resp. 0];

(e) $\oint_{\gamma} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$; γ é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$. [resp. 0]

(f) $\oint_{\gamma} x^2 dx + xy dy$; γ é a cardióide $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. [resp. 0]

4.3C Por que os resultados (a) e (b) do Exercício 2.4 não contradizem o Teorema de Green?

4.3D Seja D o anel descrito por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ e sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções de classe C^1 , isto é, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tais que $P_y = Q_x$ na região D . Quantos valores são possíveis para a integral de linha $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$, sendo γ uma curva simples fechada regular por partes contida em D ? [resp. 3]

4.3E Considere uma curva c simples fechada e suave, orientada no sentido positivo, que não passa por $(0, 0)$, e seja $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Se $\vec{n}$ representa a normal exterior à curva c , mostre que a integral de linha $\oint_{\gamma} \nabla \varphi \cdot \vec{n} ds$ assume apenas os valores 0 e 4π , conforme a curva c envolva ou não a origem.

3.6 Considere o campo vetorial:

$$\vec{F}(x, y) = \frac{x^3 + 2}{x - 1} \vec{i} + \frac{y}{(y - 2)^3} \vec{j}$$

e sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 os caminhos exibidos na figura ao lado.

Sabendo que $\oint_{\gamma_3 + \gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 10$, calcule $\oint_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

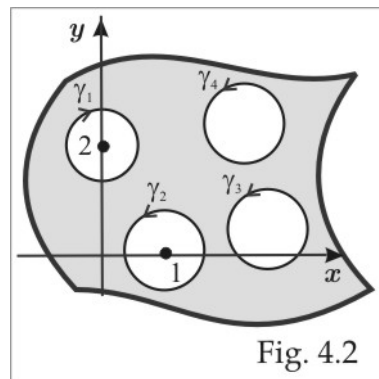


Fig. 4.2

Outras conseqüências do Teorema de Green

Nos exercícios 3.6 a 3.13, D representa uma região do plano xy com fronteira ∂D simples, fechada e regular por partes. A área da região D estamos representando por $A(D)$. Lembramos as fórmulas clássicas no caso bidimensional:

$$\text{Green Diferencial: } \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$\text{Green Vetorial: } \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA$$

$$\text{Gauss: } \oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iint_D \nabla \cdot \vec{F} dA$$

onde $\nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y$ é o *divergente*, $\nabla \times \vec{F} = (Q_x - P_y) \vec{k}$ é o *rotacional* do campo $\vec{F} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ e $\vec{n}$ é a normal exterior à fronteira ∂D .

4.3F Verifique o Teorema da Divergência no plano para os seguintes dados:

(a) $\vec{F}(x, y) = 3y \vec{i} - 2x \vec{j}$; D é a região delimitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

(b) $\vec{F}(x, y) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j}$; D é a região delimitada por $4x^2 + 25y^2 = 100$.

4.3G Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^2 , isto é, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, em uma região D . Se $\Delta f = 0$ em D , use a Fórmula de Green e deduza que:

$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

4.3H Nas condições do exercício precedente e considerando v de classe C^1 , mostre que:

$$\int_{\partial D} (f_x dy - f_y dx) v = \iint_D (v_x f_x + v_y f_y) dx dy.$$

4.3I Se x_0 e y_0 representam as coordenadas do centróide da região D , com densidade de massa $\rho \equiv 1$, mostre que:

$$2x_0 A(D) = \oint_{\partial D} x^2 dy \quad \text{e} \quad y_0 A(D) = \oint_{\partial D} xy dy.$$

4.3J Considerando $\vec{F} = \nabla u$ na Fórmula de Gauss, sendo u de classe C^2 , deduza a relação:

$$\iint_D \Delta u \, dxdy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

4.3K Com auxílio da Regra do Produto para derivação, obtenha a seguinte propriedade para o divergente:

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v.$$

Agora, considere na Fórmula de Gauss $\vec{F} = v \nabla u$ e deduza a identidade:

$$\text{Identidade de Green:} \quad \iint_D v \Delta u \, dxdy + \iint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

4.3L Se $\Delta u = 0$ na região D , usando $v = u$ na Identidade de Green, mostre que:

$$\iint_D |\nabla u|^2 \, dxdy = \oint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

4.3M Seja $f(x, y)$ um campo de classe C^1 na região D . Considerando na Fórmula de Gauss $\vec{F} = f(x, y) \vec{i}$, deduza que:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \, dxdy = \oint_{\partial D} f \eta_1 ds,$$

onde $\vec{\eta} = \eta_1 \vec{i} + \eta_2 \vec{j}$ é a normal exterior à fronteira ∂D .

4.3N Um fio tem o formato do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Determine sua massa e o momento de inércia em torno de um diâmetro, se a densidade no ponto (x, y) do fio é $\rho(x, y) = |x| + |y|$. [resp. $m = 8a^2$, $I_L = 4a^4$]

4.3O Seja $\vec{\eta} = \eta_1 \vec{i} + \eta_2 \vec{j}$ o campo de vetores normais exteriores a uma curva simples fechada e regular γ . Use a Fórmula de Gauss com $\vec{F} = \vec{i}$ e $\vec{F} = \vec{j}$ e deduza que:

$$\oint_{\gamma} \eta_1(x, y) ds = \oint_{\gamma} \eta_2(x, y) ds = 0$$

4.4 Campos Conservativos

4.4A Seja $\varphi(x, y, z)$ uma função de classe C^1 em uma região contendo uma curva regular γ com origem no ponto A e extremidade no ponto B. Mostre que:

$$\int_{\gamma} \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

4.4B Se φ e ψ são duas funções potenciais de um mesmo campo vetorial $\vec{F}$, em uma região D , mostre que existe uma constante C tal que $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + C$ em qualquer ponto (x, y, z) da região D .

4.4C Considere o campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$.

- (a) Verifique que $\vec{F}$ não é conservativo;
 (b) Qual o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}$ para mover uma partícula do ponto $A(1, 0, 1)$ ao ponto $B(-1, 0, e^\pi)$ ao longo da curva $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$? [resp. $(2e^{2\pi} - 5e^\pi - 5\pi - 3)/10$]

4.4D Um campo radial de forças no plano é descrito por $\vec{F}(x, y) = f(r)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $r = \|\vec{r}\|$. Admitindo f de classe C^1 , verifique que um tal campo é conservativo e calcule a integral $\int_{\gamma} f(r)\vec{r} \cdot d\vec{r}$ sobre o semicírculo $\gamma: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$. [resp. 0. Note que ao longo do semicírculo tem-se: $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$]

4.4E Encontre uma função potencial para o campo $\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ por $\vec{F}(\vec{r}) = r^p \vec{r}$. [resp. $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{p+2} r^{p+2}$, se $p \neq -2$ e $\varphi(\vec{r}) = \ln r + C$, se $p = -2$]

4.4F Mostre que as funções $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ satisfazem a relação $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$, mas o campo $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ não é conservativo em região alguma contendo a origem. (veja o Exercício 4.2D)

4.4G Verifique se o campo (respectivamente a forma) é conservativo (respectivamente exata) e determine uma função potencial em caso afirmativo.

- (a) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. [resp. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$]
 (b) $\vec{F}(x, y) = 3x^2y\vec{i} + x^3\vec{j}$. [resp. $\varphi(x, y) = x^3y + C$]
 (c) $\vec{F}(x, y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$. [resp. $\varphi(x, y) = x^2e^y + xy - y^2 + C$]

- (d) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. [resp. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C$]
- (e) $\vec{F}(x, y) = (y^2 - 3x)\vec{i} + (2xy + \cos y)\vec{j}$. [resp. $\varphi(x, y) = xy^2 - \frac{3}{2}x^2 + \sin y + C$]
- (f) $(\sin y - y \sin x + x) dx + (\cos x + x \cos y + y) dy$.
[resp. $\varphi(x, y) = x \sin y + y \cos x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$]
- (g) $[\sin(yx) + xy \cos(xy)] dx + [x^2 \cos(xy)] dy$. [resp. $\varphi(x, y) = x \sin xy + C$]
- (h) $(x + z) dx - (y + z) dy + (x - y) dz$. [resp. $\varphi(x, y, z) = (x - y)z + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$]
- (i) $2xy^3 dx + x^2 y^3 dy + 3x^2 y z^2 dz$. [resp. não conservativo]
- (j) $3y^4 z^2 dx + 4x^3 y^2 dy - 3x^2 y^2 dz$. [resp. não conservativo]
- (k) $(2x^2 + 8xy^2) dx + (3x^3 y - 3xy) dy - (4y^2 z^2 + 2x^3 z) dz$. [resp. não conservativo]
- (l) $(y^2 \cos x + z^3) dx - (4 - 2y \sin x) dy + (3xz^2 + 2) dz$.
[resp. $\varphi(x, y, z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + C$]
- (m) $(4xy - 3x^2 z^2 + 1) dx + (2x^2 + 2) dy - (2x^3 z + 3z^2) dz$.
[resp. $\varphi(x, y, z) = x + 2x^2 y - x^3 z^2 + 2y - z^3 + C$]
- (n) $(e^x \sin z + 2yz) dx + (2xz + 2y) dy + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2) dz$.
[resp. $\varphi(x, y, z) = e^x \sin z + 2xyz + y^2 + z^3 + C$]

4.4H Em cada caso abaixo calcule a integral de linha indicada, observando que a mesma independe do caminho.

- (a) $\int_{(0,-1)}^{(1,2)} (2y - x) dx + (2x + y^2) dy$. [resp. 13/2]
- (b) $\int_{(-2,0)}^{(4,\pi/4)} \operatorname{tg} y dx + x \sec^2 y dy$. [resp. 4]
- (c) $\int_{(0,2)}^{(1,0)} \frac{2y dx + 2x dy}{(xy + 1)^2}$. [resp. 0]
- (d) $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$. [resp. 3]
- (e) $\int_{(2,0,1)}^{(0,\pi,3)} (e^x \sin y + yz) dx + (e^x \cos y + z \sin y + xz) dy + (xy - \cos y) dz$. [resp. 4]
- (f) $\int_{\gamma} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$; γ é uma curva suave da origem ao ponto $(1, \frac{\pi}{2})$. [resp. e]

4.4I Se $f(t)$ é uma função de classe C^1 no intervalo $a \leq t \leq b$, verifique em que região do plano xy o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = yf(xy)\vec{i} + xf(xy)\vec{j}$ é conservativo. [resp. em qualquer região contida em $D : a \leq xy \leq b$]

4.4J Supondo que α e β são constantes, u e v são campos escalares e $\vec{F}$ e $\vec{G}$ são campos vetoriais, deduza as seguintes relações do cálculo diferencial:

- (a) $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$ (b) $\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$
 (c) $\nabla(u/v) = (1/v^2)[v \nabla u - u \nabla v]$ (d) $\operatorname{div}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \operatorname{div} \vec{F} + \beta \operatorname{div} \vec{G}$
 (e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0$ (f) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{G})$
 (g) $\operatorname{rot}(u \vec{F}) = u \operatorname{rot}(\vec{F}) + \nabla u \times \vec{F}$ (h) $\operatorname{rot}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \operatorname{rot}(\vec{F}) + \beta \operatorname{rot}(\vec{G})$
 (i) $\operatorname{div}(v \nabla u) = v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v$ (j) $\operatorname{div}(u \vec{F}) = \nabla u \cdot \vec{F} + u \operatorname{div}(\vec{F})$.

Usando (e) conclua que não existe um campo vetorial $\vec{F}$ com rotacional $x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

4.5 Trabalho, Massa, Centro de Massa, ...

4.5A Utilizando a fórmula $A(D) = \oint_{\partial D} x dy$, calcule a área das seguintes regiões:

- (a) D é a região limitada pelo eixo y , pelas retas $y = 1$ e $y = 3$ e pela parábola $y^2 = x$. [resp. $26/3$]
 (b) D é a região limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. [resp. πab]
 (c) D é o triângulo com vértices nos pontos $(2, 0)$, $(1, 3)$ e $(-1, 1)$. [resp. 4]

4.5B Encontre a massa de um fio cujo formato é aquele da curva interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 0$, se a densidade no ponto (x, y, z) do fio é $\rho(x, y, z) = x^2$. [resp. $2\pi/3$]

4.5C Qual o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = (2x + 3y) \vec{i} + xy \vec{j}$, para levar uma partícula da origem até o ponto $A(1, 1)$, ao longo do círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$? [resp. $(22 - 3\pi)/6$]

4.5D A força gravitacional $\vec{F}$ atuando em uma partícula de massa m , próxima da superfície da terra, é dada por $\vec{F} = -mg \vec{k}$. Mostre que o trabalho W realizado pela força $\vec{F}$ sobre a partícula, quando essa se move verticalmente de uma altura H a uma altura h , é $W = mg(H - h)$.

4.5E Um fio uniforme com densidade constante $\rho = 1$ tem o formato da hélice do Exercício 1.1(f). Determine seu centro de massa e seu momento de inércia com relação ao eixo $L : x = z, y = 1$. [resp. $C_M(0, 0, \pi)$; $I_L = \frac{\sqrt{2}}{2}(7\pi + 8\pi^3/3)$]

4.5F Calcule a massa m e o momento de inércia I_z da hélice do Exercício 1.1(f), se a densidade no ponto (x, y, z) da mola é $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. [resp. $m = \sqrt{2}(2\pi + 8\pi^3/3)$; $I_z = m$]

4.5G Para o campo $\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$, mostre que $\text{div}(\vec{F}) = 0$ e $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dê exemplo de um campo vetorial $\vec{F}$ para o qual $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ e $\text{div}(\vec{F}) = 5$. [resp. $\vec{F} = 5x \vec{i}$]

4.5H Se $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, $r = \|\vec{r}\|$ e $f(t)$ é uma função real derivável, mostre que $\nabla f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$ e $\text{rot}(f(r) \vec{r}) = \vec{0}$. Encontre os inteiros k de modo que $\text{div}(r^k \vec{r}) = 0$. [resp. $k = -3$]

4.5I Use o exercício precedente e calcule $\nabla(r)$, $\nabla(1/r)$ e $\nabla(\ln r)$ [resp. $\frac{\vec{r}}{r}$, $-\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\frac{\vec{r}}{r^2}$]

4.5J Um fio uniforme de massa m tem o formato de um semicírculo de raio a . Mostre que o momento de inércia em torno do diâmetro é $ma^2/2$ e que o centróide jaz no eixo de simetria a uma distância $2a/\pi$ do centro.

4.5K Calcule a massa e o momento de inércia I_z do fio descrito $\vec{r}(t) = t \vec{i} + 2t \vec{j} + 3t \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$, cuja densidade linear é $\delta(x, y, z) = x + y + z$. [resp.]

4.6 Área de uma Superfície

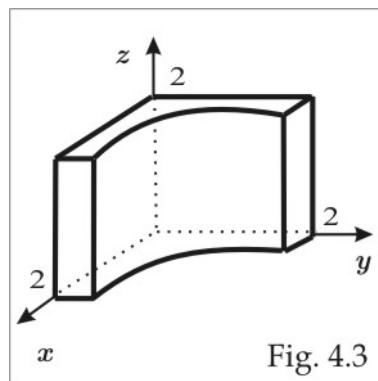
4.6A Calcule a área da superfície S em cada caso:

- (a) S é uma esfera de raio R . [resp. $4\pi R^2$]
- (b) S é a porção do plano $x + y + z = a$, $a > 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [resp. $\pi a^2 \sqrt{3}$]
- (c) S é a porção do parabolóide $x^2 + y^2 + z = a^2$, delimitada pelo cilindro vazado $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. [resp. $(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})\pi/24 \simeq 30.71$]
- (d) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$. [resp. $(2\pi - 4)a^2$]
- (e) S é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, delimitada por $y^2 = a(x + a)$. [resp. $8a^2\sqrt{2}$]
- (f) S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$. [resp. $\pi a^2 \sqrt{2}$]
- (g) S é a porção do parabolóide $x^2 + z^2 = 2ay$, $a > 0$, abaixo do plano $y = a$. [resp. $(3\sqrt{3} - 1)2\pi a^2/3$]
- (h) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$, compreendida acima da região triangular $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$. [resp. $8\sqrt{3} + 4\pi/3 - 16$]

- (i) S é a porção do plano $3x + 2y + z = 7$ no primeiro octante. [resp. $49\sqrt{14}/12$]
- (j) S é a porção do cilindro parabólico $z^2 = 8x$, compreendida acima da região $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. [resp. $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$]
- (k) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$, interna ao cilindro parabólico $x^2 = 2y + 4$ e acima do plano $z = 0$. [resp. $16\sqrt{2}$]
- (l) S é o triângulo com vértices $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 0, 2)$. [resp. $\sqrt{22}$]
- (m) S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e externa a $x^2 + y^2 = 1$. [resp. $\pi\sqrt{2}/3 + \sqrt{6}/2$]

4.6B Seja S a superfície de um paralelogramo do $\mathbb{R}^3$ e sejam S_1 , S_2 e S_3 suas projeções nos planos coordenados. Verifique que $A(S) = \sqrt{A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2}$.

6.4 Uma edificação é erguida no formato da figura ao lado, onde a fachada é descrita pela superfície cilíndrica $xy = 1$. Usando as aproximações: $\ln 2 = 0.7$ e $\int_{0.5}^2 \sqrt{1+t^{-4}} dt = 2.26$, calcule a área total da edificação. [resp. 19.32]



4.6C Deduza as fórmulas para as áreas de um cone e de um cilindro (circular reto) de raio a e altura h . [resp. $\pi a\sqrt{a^2 + h^2}$ e $2\pi ah$].

4.7 Cálculo de Integrais de Superfície

4.7A Calcule as seguintes integrais de superfícies:

- (a) $\iint_S x dS$; $S: x^2 + y^2 = R^2$, $-1 \leq z \leq 1$. [resp. 0]
- (b) $\iint_S z\sqrt{x^2 + y^2} dS$; S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$. [resp. $2\pi(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$]
- (c) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$ e $\vec{F} = y\vec{j} + z\vec{k}$. [resp. $4\pi R^3/3$]

- (d) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$; $S : x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq a$ e $\vec{F} = \sin z \vec{i} + xy \vec{j} - \cos z \vec{k}$. [resp. $(1 - \cos a)R + aR^3/3$]
- (e) $\iint_S xy dS$; $S : x^2 + y^2 = 2z$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. [resp. $(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)/15$]
- (f) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. $4\pi R^4$]
- (g) $\iint_S z^2 dS$; S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$. [resp. 60π]
- (h) $\iint_S x dS$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante. [resp. $\sqrt{3}/6$]
- (i) $\iint_S x dS$; S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$. [resp. π]
- (j) $\iint_S x^2 dS$; S é a porção do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. $\pi\sqrt{2}/4$]
- (k) $\iint_S x^2 dS$; $S : x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$. [resp. $15\pi\sqrt{2}/4$]
- (l) $\iint_S (x + y) dS$; S é a porção do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante. [resp. $5\sqrt{14}$]
- (m) $\iint_S \frac{xz}{y} dS$; S é a porção do cilindro $x = y^2$, situada no primeiro octante, entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$. [resp. $\frac{125}{24} (13\sqrt{65} - \sqrt{5})$]

4.7B Considere o campo $\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ e compare os valores das integrais: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ e $\iiint_\Omega \text{div}(\vec{F}) dV$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e Ω é a bola do $\mathbb{R}^3$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ (resp. 0).

4.8 Fórmulas de Gauss e Stokes. Aplicações

4.8A Com auxílio do Teorema de Stokes calcule $\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo c o bordo da superfície S :

- (a) $\vec{F} = y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j} + x^2 \vec{k}$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$, situada no primeiro octante. [resp. -1]
- (b) $\vec{F} = 3y \vec{i} - xz \vec{j} + yz^2 \vec{k}$; S é a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$, situada abaixo do plano $z = 2$. [resp. 20π]

(c) $\vec{F} = 2y\vec{i} + z\vec{j} + 3\vec{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -2π]

(d) $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$; S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. [resp. π]

(e) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. [resp. 0]

4.8B Com auxílio do Teorema de Stokes calcule $\int_c Pdx + Qdy + Rdz$:

(a) $\int_\gamma ydx + zdy + xdz$; $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$. [resp. $-\sqrt{3}\pi R^2$]

(b) $\int_\gamma (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$; $\gamma : x^2 + y^2 = 2y$, $y = z$. [resp. 0]

(c) $\int_\gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$; γ é a curva interseção da fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, com plano $x + y + z = 3a/2$. [resp. $-9a^3/2$]

(d) $\int_\gamma x^3 dz$; γ é o bordo da superfície $S : z = y + 4$; $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. [resp. $45\pi/4$]

(e) $\int_\gamma ydx - x^2 dy + 5dz$; γ é o bordo da superfície $S : \vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u^2)\vec{k}$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v \leq 1$. [resp. $-5/6$]

4.8C Calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S e, quando possível, use o Teorema da Divergência de Gauss para comprovar o resultado:

(a) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. [resp. $2\pi a^3$]

(b) $\vec{F} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$; S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -3π]

(c) $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j}$; S é a parte do primeiro octante, limitada pelos três planos coordenados e pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. 0]

(d) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; S é a fronteira do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $x = 1$, $y = 2$, e $3x + 2y + z = 12$. [resp. 51]

4.8D Seja S a superfície descrita por: $\vec{X}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (2 - u^2 + v^2)\vec{k}$, $u^2 + v^2 \leq 1$, e considere o campo $\vec{F} = y\vec{i} + (x + y)\vec{k}$. Calcule o fluxo de $\text{rot}(\vec{F})$ através de S de duas maneiras: primeiro por um cálculo direto e, depois, usando a Fórmula de Stokes. [resp. $-\pi$]

4.8E Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ e seja $r = \|\vec{r}\|$. Verifique que o fluxo do campo $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ através de uma superfície simples fechada regular S que não contenha a origem é igual a zero. Qual seria o fluxo do campo $\vec{F}$, se a superfície S contivesse a origem no seu interior? [resp. 4π]

4.8F Com a notação do exercício precedente e admitindo que Ω representa uma região compacta do $\mathbb{R}^3$ delimitada por uma superfície simples fechada e regular S (por exemplo uma esfera), use o Teorema da Divergência de Gauss e verifique a relação:

$$\iint_S r \vec{r} \cdot \vec{n}_S dS = 4 \iiint_{\Omega} r dV.$$

4.8G Use a Fórmula de Gauss e estabeleça as seguintes identidades:

- (a) $\iiint_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dV = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_S} dS.$
 (b) $\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dV = \iint_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_S} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}_S}) dS.$
 (c) $vol(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \|\vec{r}\| \cos(\vec{r}, \vec{n}_S) dS.$

4.8H Se $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ representam os co-senos diretores da normal exterior à superfície S , use o Teorema de Gauss e calcule as seguintes integrais de superfícies:

- (a) $\iint_S (xy \cos\alpha + yz \cos\beta + xz \cos\gamma) dS$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. 0]
 (b) $\iint_S x^2 y^2 z^2 (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS$; S é a fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$. [resp. $a^8/3$]

4.8I Uma curva regular c no plano xz , de equação cartesiana $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gira em torno do eixo z descrevendo uma superfície S . Deduza a *Fórmula de Pappus*: $A(S) = 2\pi Lh$, onde L é o comprimento da curva c e h é a distância do centróide de c ao eixo de rotação.

4.8J Em coordenadas cilíndricas uma superfície S é descrita pela equação $z = G(r, \theta)$, $(r, \theta) \in D$. Mostre que:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + G_r^2 + \frac{1}{r^2} G_\theta^2} r dr d\theta.$$

4.8K Mostre que em coordenadas cilíndricas, a equação $z = G(r)$, $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa uma superfície de revolução cuja área é:

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + G_r^2} \, r \, dr.$$

4.8L Calcule a área do cone obtido por rotação da reta $y = 3x + 2$, $0 \leq x \leq 3$, $z = 0$, em torno do eixo x . [resp. $39\pi\sqrt{10}$]

4.8M Calcule o momento de inércia da superfície homogênea S em torno do eixo indicado. Em cada caso admita que a densidade superficial de massa é $\rho \equiv 1$.

(a) S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, que jaz entre as folhas do cone $x^2 + y^2 = z^2$; Eixo x . [resp. $1024/45$]

(b) S é a superfície do tetraedro com vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ e $D(0, 0, 0)$; Eixo y . [resp. $(2 + \sqrt{3})/6$]

(c) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo z . [resp. $8\pi R^4/3$]

(d) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo é a reta $x = y$, $z = 0$. [resp. $8\pi R^4/3$]

4.8N Encontre o centróide de cada superfície S dada abaixo. Como no exercício precedente, admita que a densidade superficial de massa é $\rho \equiv 1$.

(a) S é o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. [resp. $C(0, 0, R/2)$]

(b) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que jaz no interior do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$. [resp. $C(0, 0, \frac{2 + \sqrt{2}}{4})$]

(c) S é a porção do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, externa ao cilindro $x^2 + y^2 = 2$. [resp. $C_M(0, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, 0)$]

4.8O Uma concha esférica homogênea de raio a é cortada pela folha de um cone circular reto cujo vértice está no centro da esfera. Se o ângulo do vértice do cone é α , $0 < \alpha < \pi$, qual o centro de massa da porção da concha que jaz no interior do cone? [resp. sobre o eixo do cone, distante $\frac{a(1 - \cos \alpha)}{4[1 - \cos(\alpha/2)]}$ do centro da esfera]

4.8P Calcule o potencial eletrostático $\varphi(x, y, z)$ no ponto $A(0, 0, z)$ devido a uma distribuição uniforme de carga elétrica, com densidade ρ , no disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. Qual o campo elétrico $\vec{E}$ no

ponto A ? [resp. $\varphi = 2\pi\rho\left(\sqrt{a^2+z^2}-|z|\right)$; $\vec{E} = -\nabla\varphi = 2\pi\rho z\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{k}$]

4.8Q No exercício precedente qual seria o potencial eletrostático e o campo elétrico no ponto A , se a densidade no ponto (x, y) do disco fosse $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$? Use os resultados:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln\left|r + \sqrt{r^2+z^2}\right|; \quad \int \sqrt{r^2+z^2} dr = \frac{r}{2}\sqrt{r^2+z^2} + \frac{z^2}{2} \ln\left|r + \sqrt{r^2+z^2}\right|,$$

e encontre as seguintes expressões para o potencial e o campo elétrico:

$$\begin{aligned}\varphi &= \pi z^2 \left[\frac{a}{z} \sqrt{1 + (a/z)^2} - \ln \left(\frac{a}{z} + \sqrt{1 + (a/z)^2} \right) \right] \\ \vec{E} &= 2\pi z \left[\ln \left(\frac{a}{z} + \sqrt{1 + (a/z)^2} \right) - \frac{a}{z} \sqrt{1 + (a/z)^2} \right] \vec{k}\end{aligned}$$

4.8R Calcule o campo eletrostático na origem devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq a$. [resp. $\vec{E} = 2\pi\rho \frac{\sqrt{R^2+a^2}-R}{\sqrt{R^2+a^2}} \vec{k}$]

4.8S Qual o potencial eletrostático no ponto $(0, 0, z)$, devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$? [resp. $\frac{2\pi\rho R}{z}(\sqrt{R^2+z^2}-R+z)$]

4.8T Considere uma distribuição uniforme de carga elétrica sobre uma esfera S de raio a . Mostre que o campo elétrico num ponto do eixo z interior a S é zero. Qual o campo elétrico nos pontos do eixo z exteriores à esfera S ? [resp. $\vec{E}(0, 0, z) = \frac{4\pi a^2 \rho}{z^2} \vec{k}$. Note que o fenômeno ocorre como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera]

4.8U Mostre que $\iint_S (x^2 + y^2) (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{\eta} dS = 4I_z$, onde I_z representa o momento de inércia, com relação ao eixo z , do sólido com densidade de massa $\rho \equiv 1$, delimitado por S .

4.8V Seja S a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$, $0 \leq z \leq 1$, que jaz entre os planos $x = 2a$ e $x = b$, $0 < b < 2a$. Admita a densidade constante ρ_0 e calcule: (a) a massa de S ; e (b) o momento de inércia I_z de S . [resp. (a) $2a\rho_0 \arcsen(\frac{1}{a}\sqrt{2ab-b^2})$; (b) $4a^2\rho_0(a + \sqrt{2ab-b^2})$.]

4.8W Dada uma superfície S de equação cartesiana $\varphi(x, y, z) = 0$, $(y, z) \in D$, φ de classe C^1 , com $\varphi_x \neq 0$, mostre que:

$$(a) \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \frac{f(x, y, z)}{|\varphi_x|} dydz;$$

$$(b) \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_S dS = \iint_D (\vec{F} \cdot \nabla \varphi) \frac{1}{|\varphi_x|} dydz.$$