

UFPB/CCEN/DM

PERÍODO 2017.2

DISCIPLINA: Álgebra Linear 2

TURNO: Manhã

PROFESSOR: Milton

TURMA: 01

1ª Lista de Exercícios

1. Sejam  $u = (x_1, x_2)$  e  $v = (y_1, y_2)$  pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ .

(i) Verifique que a função  $f$  é um produto interno no  $\mathbb{R}^2$ .

$$f(u, v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

(ii) Para que valores de  $k$  a função  $f$  é um produto interno no  $\mathbb{R}^2$ ?

$$f(u, v) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2.$$

(iii) Para que valores de  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  a função  $f$  é um produto interno em  $\mathbb{R}^2$ ?

$$f(u, v) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

2. Sejam  $u = (x_1, x_2)$  e  $v = (y_1, y_2)$  pertencentes a  $\mathbb{C}^2$ .

Para que valores de  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  a função  $f$  é um produto interno em  $\mathbb{C}^2$ ?

$$f(u, v) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

3. Verifique a lei do paralelogramo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

4. Seja  $V$  o espaço vetorial das matrizes  $m \times n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Mostre que  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$  define um produto interno em  $V$ .
5. Seja  $V$  o espaço vetorial dos polinômios sobre  $\mathbb{R}$ . Mostre que  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  define um produto interno em  $V$ .

6. Encontre uma base do subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^4$  ortogonal a  $u_1 = (1, -2, 3, 4)$  e  $u_2 = (3, -5, 7, 8)$ .
7. Encontre uma base ortonormal para o subespaço  $W \in \mathbb{C}^3$ , gerado por  $u_1 = (1, i, 1)$  e  $u_2 = (1 + i, 0, 2)$ .
8. Seja  $V$  o espaço dos polinômios, sobre  $\mathbb{R}$ , de grau  $\leq 2$ , com produto interno  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ .
- (i) Encontre uma base do subespaço  $W$  ortogonal a  $h(t) = 2t + 1$ .
- (ii) Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base  $\{1, t, t^2\}$  para obter uma base ortonormal  $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$  de  $V$ .
9. Encontre a projeção de  $v$  em  $w$  se:
- (i)  $v = (1, -1, 2)$  e  $w = (0, 1, 1)$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (ii)  $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  e  $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  no espaço do problema 4.
10. Suponhamos que  $\{u_1, \dots, u_r\}$  é uma base ortonormal para um subespaço  $W$  de  $V$ . Seja  $E : V \rightarrow V$  a transformação linear dada por

$$E(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_r \rangle u_r.$$

Mostre que  $E$  é a projeção ortogonal de  $V$  em  $W$ .

11. Seja  $\{u_1, \dots, u_r\}$  um subconjunto ortonormal de  $V$ . Mostre que, para qualquer  $v \in V$ ,  $\sum_{i=1}^r |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$ . (Conhecida como a desigualdade de Bessel.)
12. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $T(x, y, z) = (x + 2y, 3x - 4z, y)$ . Encontre  $T^*(x, y, z)$ .
13. Mostre  $T^*T = 0$  implica que  $T = 0$ .
14. Seja  $V$  o espaço vetorial dos polinômios sobre  $\mathbb{R}$  com produto interno definido por  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Seja  $D$  o operador derivada, isto é,  $D(f) = df/dt$ . Mostre

que não existe um operador  $D^*$  em  $V$  tal que  $\langle D(f), g \rangle = \langle f, D^*(g) \rangle$  para quaisquer  $f, g \in V$ . Isto é,  $D$  não tem adjunto.

15. Demonstre que o produto e inversas de matrizes ortogonais são ortogonais. (Desse modo, as matrizes ortogonais formam um grupo multiplicativo chamado *grupo ortogonal*).
16. Demonstre que o produto e inversas de matrizes unitárias são unitárias. (Desse modo, as matrizes unitárias formam um grupo multiplicativo chamado *grupo unitário*).
17. Mostre que, se uma matriz ortogonal (unitária) é triangular, então ela é diagonal.
18. Seja  $W$  um subespaço de  $V$ . Para qualquer  $v \in V$ , faça  $v = w + w'$ , onde  $w \in W$ ,  $w' \in W^\perp$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  definida por  $T(v) = w - w'$ . Mostre que  $T$  é um operador unitário auto-adjunto em  $V$ .
19. Seja  $V$  um espaço com produto interno e suponhamos que  $U : V \rightarrow V$  (não necessariamente linear) é sobrejetora e preserva produtos internos, isto é,  $\langle U(v), U(w) \rangle = \langle v, w \rangle$  para quaisquer  $v, w \in V$ . Demonstre que  $U$  é linear e, portanto, unitário.
20. Suponhamos que  $P$  é positivo e unitário. Prove que  $P = I$ .
21. Diz-se que uma matriz  $n \times n$  (real ou complexa)  $A = (a_{ij})$  é *positiva*, se  $A$  encarada como um operador linear em  $\mathbb{K}^n$  for positiva. (Analogamente, se define uma matriz *definida positiva*.) Demonstre que  $A$  é positiva (definida positiva) se, e somente se,  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$  e
 
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{x_j} \geq 0 \quad (> 0)$$
 para quaisquer  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{K}^n$ .

22. Para qualquer operador  $T$ , mostre que  $T + T^*$  é auto-adjunto e  $T - T^*$  é anti-adjunto.
23. Seja  $V$  um espaço complexo com produto interno. Suponhamos que  $\langle T(v), v \rangle$  é real para qualquer  $v \in V$ . Mostre que  $T$  é auto-adjunto.

24. Suponhamos que  $S$  e  $T$  são auto-adjuntos. Mostre que  $ST$  é auto-adjunto se, e somente se,  $S$  e  $T$  comutam.
25. Verifique que  $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$  é normal. Encontre uma matriz unitária  $P$  tal que  $P^*AP$  seja diagonal e calcule  $P^*AP$ .
26. Mostre que uma matriz triangular é normal se, e somente se, ela é diagonal.
27. Mostre que operadores operadores auto-adjuntos, anti-adjuntos e unitários (ortogonais) são normais.
28. Mostre que existe uma base ortonormal  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $V$  consistindo em auto-vetores de  $T$  se, e somente se, existem projeções ortogonais  $E_1, \dots, E_r$  e escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  tais que
- (i)  $T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_r E_r$ ;
  - (ii)  $E_1 + \dots + E_r = I$ ;
  - (iii)  $E_i E_j = 0$ , para  $i \neq j$ .