

UFPB/CCEN/DM

PERÍODO 15.1

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA TURMA: 01

DISCIPLINA: Álgebra Linear

TURNO: Manhã

PROFESSOR: Milton

4ª Lista de Exercícios

1. Encontre todas as formas canônicas de Jordan possíveis para as matrizes cujos polinômios característico e mínimo são dados por
 - (i) $p_A(t) = (t - 2)^4(t - 3)$, $m(t) = (t - 2)^2(t - 3)^2$.
 - (ii) $p_A(t) = (t - 3)^4(t - 5)^4$, $m(t) = (t - 3)^2(t - 5)^2$.
2. Suponhamos que $T : V \rightarrow V$ é linear. Demonstre que $Z(v, T)$ é a interseção de todos os subespaços T -invariantes, contendo v .
3. Encontre todas as formas canônicas racionais possíveis para:
 - (i) matrizes 6×6 com polinômio mínimo $m(t) = (t^2 + 3)(t + 1)^2$.
 - (ii) matrizes 8×8 com polinômio mínimo $m(t) = (t^2 + 2)(t + 3)^2$.
4. Seja A uma matriz 4×4 com polinômio mínimo $m(t) = (t^2 + 1)(t^2 - 3)$. Encontre a forma canônica racional para A , se A é uma matriz sobre (i) o corpo racional, (ii) o corpo real, (iii) o corpo complexo.
5. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$.
 - (i) Verifique que a função f é um produto interno no $\mathbb{R}^2$.

$$f(u, v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

- (ii) Para que valores de k a função f é um produto interno no $\mathbb{R}^2$?

$$f(u, v) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2.$$

(iii) Para que valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a função f é um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

$$f(u, v) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

6. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ pertencentes a $\mathbb{C}^2$.

Para que valores de $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a função f é um produto interno em $\mathbb{C}^2$?

$$f(u, v) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

7. Verifique a lei do paralelogramo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

8. Seja V o espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ define um produto interno em V .

9. Seja V o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{R}$. Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define um produto interno em V .

10. Encontre uma base do subespaço W do $\mathbb{R}^4$ ortogonal a $u_1 = (1, -2, 3, 4)$ e $u_2 = (3, -5, 7, 8)$.

11. Encontre uma base ortonormal para o subespaço $W \in \mathbb{C}^3$, gerado por $u_1 = (1, i, 1)$ e $u_2 = (1 + i, 0, 2)$.

12. Seja V o espaço dos polinômios, sobre $\mathbb{R}$, de grau ≤ 2 , com produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

(i) Encontre uma base do subespaço W ortogonal a $h(t) = 2t + 1$.

(ii) Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{1, t, t^2\}$ para obter uma base ortonormal $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ de V .

13. Encontre a projeção de v em w se:

(i) $v = (1, -1, 2)$ e $w = (0, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$;

(ii) $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no espaço do problema 4.

14. Suponhamos que $\{u_1, \dots, u_r\}$ é uma base ortonormal para um subespaço W de V . Seja $E : V \rightarrow V$ a transformação linear dada por

$$E(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_r \rangle u_r.$$

Mostre que E é a projeção ortogonal de V em W .

15. Seja $\{u_1, \dots, u_r\}$ um subconjunto ortonormal de V . Mostre que, para qualquer $v \in V$, $\sum_{i=1}^r |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$. (Conhecida como a desigualdade de Bessel.)
16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x + 2y, 3x - 4z, y)$. Encontre $T^*(x, y, z)$.
17. Mostre $T^*T = 0$ implica que $T = 0$.
18. Seja V o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ com produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Seja D o operador derivada, isto é, $D(f) = df/dt$. Mostre que não existe um operador D^* em V tal que $\langle D(f), g \rangle = \langle f, D^*(g) \rangle$ para quaisquer $f, g \in V$. Isto é, D não tem adjunto.
19. Demonstre que o produto e inversas de matrizes ortogonais são ortogonais. (Desse modo, as matrizes ortogonais formam um grupo multiplicativo chamado *grupo ortogonal*).
20. Demonstre que o produto e inversas de matrizes unitárias são unitárias. (Desse modo, as matrizes unitárias formam um grupo multiplicativo chamado *grupo unitário*).
21. Mostre que, se uma matriz ortogonal (unitária) é triangular, então ela é diagonal.
22. Seja W um subespaço de V . Para qualquer $v \in V$, faça $v = w + w'$, onde $w \in W$, $w' \in W^\perp$. Seja $T : V \rightarrow V$ definida por $T(v) = w - w'$. Mostre que T é um operador unitário auto-adjunto em V .

23. Seja V um espaço com produto interno e suponhamos que $U : V \rightarrow V$ (não necessariamente linear) é sobrejetora e preserva produtos internos, isto é, $\langle U(v), U(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para quaisquer $v, w \in V$. Demonstre que U é linear e, portanto, unitário.
24. Suponhamos que P é positivo e unitário. Prove que $P = I$.
25. Diz-se que uma matriz $n \times n$ (real ou complexa) $A = (a_{ij})$ é *positiva*, se A encarada como um operador linear em $\mathbb{K}^n$ for positiva. (Analogamente, se define uma matriz *definida positiva*.) Demonstre que A é positiva (definida positiva) se, e somente se, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ e
- $$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{x}_j \geq 0 \quad (> 0)$$
- para quaisquer $(x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{K}^n$.
26. Para qualquer operador T , mostre que $T + T^*$ é auto-adjunto e $T - T^*$ é anti-adjunto.
27. Seja V um espaço complexo com produto interno. Suponhamos que $\langle T(v), v \rangle$ é real para qualquer $v \in V$. Mostre que T é auto-adjunto.
28. Suponhamos que S e T são auto-adjuntos. Mostre que ST é auto-adjunto se, e somente se, S e T comutam.
29. Verifique que $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ é normal. Encontre uma matriz unitária P tal que P^*AP seja diagonal e calcule P^*AP .
30. Mostre que uma matriz triangular é normal se, e somente se, ela é diagonal.
31. Mostre que operadores auto-adjuntos, anti-adjuntos e unitários (ortogonais) são normais.
32. Mostre que existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V consistindo em auto-vetores de T se, e somente se, existem projeções ortogonais $E_1, \dots, E_r$ e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tais que

$$(i) \ T = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_r E_r;$$

$$(ii) \ E_1 + \cdots + E_r = I;$$

$$(iii) \ E_i E_j = 0, \text{ para } i \neq j.$$