

UFPB/CCEN/DM

PERÍODO 15.1

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA TURMA: 01

DISCIPLINA: Álgebra Linear

TURNO: Manhã

PROFESSOR: Milton

2ª Lista de Exercícios

1. Considere o subespaço vetorial W de $P_4(\mathbb{R})$ gerado pelo conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2x + x^2 + 3x^3 + x^4, 1 - 2x - 2x^2 - 2x^3 - 3x^4, \\ 2 - x^2 + x^3 - 2x^4, x - x^3 + x^4, 3x^2 + 6x^3 + 3x^4 \end{array} \right\}.$$

Determine uma base β de W que esteja contida em $\mathcal{A}$.

2. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $W_1 = \{f \in V : f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{f \in V : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Prove que W_1 e W_2 são subespaços de V e $V = W_1 \oplus W_2$.
3. Mostre que todo espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{K}$ é uma soma direta de subespaços vetoriais de dimensão 1.
4. Mostre que se $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_p$, então $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^p \dim_{\mathbb{K}} W_i$.
5. Prove que cada uma das transformações abaixo é linear:
- (a) $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $F(p(t)) = t^2 p''(t)$.
- (b) $F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX + X$ onde $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b) = ax^2 + bx + (a + b)$.
6. Consideremos uma transformação linear $T : U \rightarrow V$, onde U e V são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ tais que $\dim V < \dim U < \infty$.
- (a) Prove que existe um elemento não nulo $u \in U$ tal que $T(u) = 0$.
- (b) Se β é uma base arbitrária de U , existe sempre um vetor $u \in \beta$ tal que $T(u) = 0$? Prove ou dê um contra-exemplo.

7. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a função dada por

$$T((a, b, c)_\beta) = (2c - 2b, a + c, a + b + c)_\alpha$$

onde α é a base $\{1, x, x^2\}$ e β é a base $\{1, x + x^2, 1 + x^2\}$.

(a) Verifique que T é uma transformação linear.

(b) Existe um vetor $u \in P_2(\mathbb{R})$ não nulo tal que $T(u) = u$? Justifique sua resposta.

8. Mostre que a composta de transformações lineares é linear.

9. Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $T : U \rightarrow U$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$.

Seja $W = \{x \in U : T(x) = x\}$ e $V = \{x \in U : T(x) = 0\}$. Prove que:

(a) $U = W \oplus V$; (b) $T(U) = W$; e (c) $T(V) = \{0\}$.

10. Mostre que uma função $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é uma transformação linear se e somente se existirem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

11. Sem a hipótese de que $\dim U$ seja finita, prove o seguinte resultado: Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $\{u_i\}_{i \in I}$ for uma base de U e se $\{v_i\}_{i \in I} \subset V$, então existe uma única transformação linear $T : U \rightarrow V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i \in I$. I é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

12. Determine quatro transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ cujos núcleos tenham dimensões 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

13. Considere $\mathbb{R}^4$ e seus subespaços $V = [(1, 0, 1, 1), (0, -1, -1, -1)]$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } t + z = 0\}$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $N(T) = V$ e $\text{Im } T = W$.

14. Sejam U, V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear.

- (a) Prove que T é injetora $\iff T$ leva cada subconjunto l.i. de U em um subconjunto l.i. de V .
- (b) Prove que se o conjunto $\{T(u_1), \dots, T(u_r)\}$ for l.i. em V então $\{u_1, \dots, u_r\}$ é l.i. em U .
15. Mostre que se $T : U \rightarrow V$ for uma transformação linear injetora, então $\dim U \leq \dim V$.
16. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $T : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ o operador dado por $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$. Prove que T é um isomorfismo e exiba T^{-1} .
17. Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T, S : U \rightarrow U$ transformações lineares invertíveis sobre U . Prove que $S \circ T$ é invertível e $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.
18. Seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ a transformação linear definida por $T(1, 0, 0) = (1, 0, i)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $T(0, 0, 1) = (i, 1, 0)$. Decida se T é invertível.
19. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformações lineares.
- (a) Provar que $S \circ T$ não é invertível.
- (b) Achar um exemplo em $T \circ S$ não é invertível.
20. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Suponhamos que exista $S : V \rightarrow V$ tal que $T \circ S = I_V$. Demonstre que T é invertível e $S = T^{-1}$. Dê um exemplo que mostre que isto é falso quando a dimensão de V não for finita.
21. Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear injetora. Mostre que V tem um subespaço isomorfo a U .
22. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ache uma base de $\text{Im } T$ e uma base de $N(T)$.

23. Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ z - w & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a matriz de T com relação à base canônica.

(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_\beta = M^{-1}[T]_{can}M$.

24. Mostre que se U e U' são isomorfos e que se V e V' são isomorfos então $L(U, V)$ é isomorfo a $L(U', V')$.

25. Exibir uma base de $L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.

26. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $v \in V$. Mostre que se $f(v) = 0, \forall f \in V^*$, então $v = 0$.

27. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$ e sejam f_1, f_2 e $f_3 \in V^*$ definidas por

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx \text{ e } f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)dx.$$

(a) Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V^* .

(b) Exiba uma base de V da qual $\{f_1, f_2, f_3\}$ seja a base dual.

28. Sejam $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, -2)$, $u_3 = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Seja $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $f(u_1) = 1$, $f(u_2) = -1$ e $f(u_3) = 3$. Determine $f(a, b, c)$, onde $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Se $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ é tal que $f(u_1) = f(u_2) = 0$ e $f(u_3) \neq 0$, mostre que $f(2, 3, -1) \neq 0$.

29. Seja $W \subset (\mathbb{R}^4)^*$ um subespaço formado pelos funcionais $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $N(f)$ contém os vetores $(1, 0, 3, -2)$ e $(0, 1, 3, 0)$. Ache uma base de W .
30. Seja $H \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão $n - 1$. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ uma base de $\mathbb{R}^n$ cujos primeiros $n - 1$ vetores formam uma base de H e considere a base dual $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ da base β . Prove que $f_n(v) = 0$ para cada $v \in H$.