

UFPB/CCEN/DM

PERÍODO 15.1

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA TURMA: 01

DISCIPLINA: Álgebra Linear

TURNO: Manhã

PROFESSOR: Milton

1ª Lista de Exercícios

1. Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.
2. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{K}$ tal que com as operações de $\mathbb{K}$ é um corpo (neste caso, dizemos que $\mathbb{K}'$ é um subcorpo de $\mathbb{K}$). Mostre que $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}'$. Mais geralmente, mostre que se V for um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então será um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}'$.
3. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ um plano do $\mathbb{R}^3$ passando pela origem. Mostre que S é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
4. Descreva o espaço vetorial das soluções do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 5z + 3w = 0 \\ 4x + 4y + 10z + 3w = 0. \end{cases}$$

5. Suponha que estejam definidas as seguintes operações no conjunto $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \cdot b > 0\}$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd), \quad \forall (a, b), (c, d) \in V$$

$$\alpha(a, b) = (a^\alpha, b^\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (a, b) \in V.$$

Prove que V , munido dessas operações, é um espaço $\mathbb{R}$ - espaço vetorial.

6. É possível encontrar um conjunto gerador de $P(\mathbb{R})$ com um número finito de elementos?

7. Qual é o menor número de elementos em um conjunto gerador de $\mathbb{C}^2$ se o considerarmos como espaço vetorial sobre (a) $\mathbb{C}$; (b) $\mathbb{R}$; (c) $\mathbb{Q}$?.
8. Qual é o menor número de elementos que deve conter um conjunto gerador de visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$? Tente exibir um tal conjunto.
9. Mostre que todo espaço vetorial tem um conjunto gerador.
10. Ache uma base de $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Quantos elementos tem? E se considerarmos $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?
11. (a) Mostre que os conjuntos $\{(1, 0), (0, 1)\}$, $\{(i, 0), (2, -3)\}$ e $\{(i, i), (-1, 2i)\}$ são bases de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.
 (b) Mostre que $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.
 (c) Mostre que toda base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ tem 2 elementos e que toda base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ tem 4 elementos.
12. Mostre que $\{(z_1, z_2), (w_1, w_2)\} \subset \mathbb{C}^2$ é l.d. se e somente se $z_1 w_2 = z_2 w_1$.
13. Sob que condições impostas ao escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ os vetores $(0, 1, \alpha)$, $(\alpha, 0, 1)$ e $(1 + \alpha, 1, \alpha)$ formam uma base de $\mathbb{C}^3$?
14. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Prove que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é l.i. em V onde f_1, f_2, f_3 são dadas respectivamente por $1, e^{ix}, e^{-ix}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
15. Seja $\mathcal{B} = \{(i, 1 - i, 2), (2, 1, -i)(5 - 2i, 4, -1 - i)\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}^3$.
 (a) $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i.?
 (b) Decida se $(3 + i, 4, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}$.
 (Considere $\mathbb{C}^3$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{R}$).

16. Mostre o conjunto S das soluções do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 5x + y + 2z - 3w = 0 \\ 6x + y - 3z + 2w = 0 \\ 3x + y + 12z - 13w = 0. \end{cases}$$

é um $\mathbb{R}$ - espaço vetorial e exiba uma base de S .

17. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $\mathcal{B} = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é base de V .

(b) Escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ com relação à base $\mathcal{B}$.

18. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ em questão ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), nos seguintes casos:

(a) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $S = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)^2 dx = 0 \right\}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $V = \mathbb{R}^n$ e $S = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \cdot a_2 = 0\}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(c) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $S = \{f \in V; f(0) = f(1)\}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V : a_{ij} = \bar{a}_{ji}, i, j = 1, 2 \right\}, V = \mathbb{M}_2(\mathbb{C}), \mathbb{K} = \mathbb{C}$.

19. Sejam $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e $W = \{A \in V; \text{tr } A = 0\}$. Mostre que W é um subespaço de V e ache uma base e a dimensão de W .

20. Seja U um subespaço vetorial de um espaço vetorial V finitamente gerado sobre $\mathbb{K}$. Mostre que se $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$, então $U = V$.