UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Iniciação ao Estudo da Análise não Linear e Aplicações

Relatório

Nádia Pinheiro Nóbrega
Bolsista pelo Programa PIBIC/UFPB/CNPq

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
Orientador

20 de outubro de 2003

Sumário

1 **5**
1.1 Resultados Importantes do Cálculo Avançado 5

2 **14**
2.1 Unicidade do Grau 14

Bibliografia **50**

Introdução

O presente é um resumo das atividades de pesquisa pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica PIBIC/CNPq/UFPB, por parte da bolsista, no período de agosto de 2003 a outubro de 2003. Nele será exibido comentários sobre o projeto, isto é, uma introdução do projeto, os objetivos, a metodologia utilizada, o conteúdo desenvolvido até o momento,a conclusão, e por fim a bibliografia utilizada.

É bem sabido que tratou-se de um estudo inicial da Teoria do Grau Topológico. O objetivo principal deste projeto foi introduzir os principais resultados do Cálculo Avançado utilizados para provar não apenas a unicidade do grau topológico como também os conceitos que não foram vistos. É importante salientar que a bolsista vai continuar dando andamento neste projeto mesmo não estando engajada no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica PIBIC/CNPq/UFPB.

O orientador é o Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, do Departamento de Matemática, e a aluna, Nádia Pinheiro Nóbrega, estudante de Matemática, matrícula 10111089. O Projeto que teve início em agosto de 2003 está previsto para terminar em julho do corrente ano.

Participar de um projeto desta natureza foi consideravelmente benéfico, proporcionou o crescimento e amadurecimento da bolsista nessa área de pesquisa. A iniciação científica se tornou de fato um meio para futuros estudos em uma pós-graduação e aplicações das ferramentas expostas ao longo da graduação.

Objetivos

O nosso projeto visa construir uma ferramenta que sirva para investigar soluções de problemas envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias e utilizar esses conceitos em estudos futuros numa pós-graduação e possui outros objetivos citados abaixo:

Aprofundamento dos conhecimentos já adquiridos na graduação; compreenção dos trabalhos que se poderá desenvolver em uma pesquisa; oportunidade do trabalho científico em grupo e interação não só com o orientador mas com colegas que são bolsistas também.

Metodologia

Usamos a seguinte metodologia: apresentações semanais de temas para o orientador; execução de leituras de textos da bibliografia.

Utilizamos também (como integrante do grupo "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise"): o estudo em grupo; apresentação dos temas para outros bolsistas que estão ligados ao grupo de pesquisa coordenado pelo Prof. João Marcos Bezerra; participação em ciclo de palestras promovidos pelo grupo supracitado.

Alguns dos conteúdos desenvolvidos até o momento

De acordo com o nosso projeto o cumprimos até o presente momento e listamos abaixo os de maior relevância.

1. Revisão dos principais resultados do Cálculo Avançado

   Aplicações Diferenciáveis; a Desigualdade do Valor Médio; o Teorema da Função Inversa; o Teorema da Função Implícita; o Teorema de Sard; Integrais Múltiplas; o Teorema de Fubini; o Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais.

2. Grau Topológico em Dimensão Finita

   Unicidade do Grau Topológico

Capítulo 1

1.1 Resultados Importantes do Cálculo Avançado

Os resultados dessa primeira etapa estão sendo vistos na medida em que se desenvolve a Teoria do Grau em Dimensão Finita. Inicialmente, vejamos e provemos alguns deles.

Definição 1.1.1. *Recordemos uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável em $a \in \Omega$ quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = T.v + \rho(v).|v|\,, \text{ onde } \lim_{v\to 0} \rho(v) = 0 \tag{1.1}$$

onde supões-se que $a + v \in \Omega$, para que $f(a + v)$ tenha sentido. Como Ω é aberto, $\exists \delta > 0$ tal que $|v| < \delta \Rightarrow a + v \in \Omega$.

A aplicação ρ é definida $\forall v \in \Omega$ tal que $a + v \in \Omega$ e

$$\rho(v) = \begin{cases} \frac{r(v)}{|v|} & se \quad v \neq 0 \\ 0 & se \quad v = 0 \end{cases}$$

onde temos ρ contínua em zero. Uma vez dada T, a diferenciabilidade de f no ponto a tem sua essência na afirmação de que o "resto" $r(v)$ é infinitésimo em relação a v.

Em particular a única transformação linear T que fornece uma boa aproximação para o acréscimo $f(a+v) - f(a)$ na vizinhança do ponto a é a derivada de f no ponto a denotada por $f^{'}(a)$.

Portanto se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$,é diferenciável em $a \in \Omega$ sua derivada é a aplicação linear $f^{'}(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ caracterizada por

$$f(a+v) - f(a) = f^{'}(a).v + \rho(v).|v|\,, \text{ onde } \lim_{v\to 0} \rho(v) = 0$$

Quando se estudam funções reais de n variáveis, definidas em subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^n$, a noção de derivada que se apresenta mais naturalmente é a de "derivada parcial".

Seja pois $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dado o ponto $a \in U$, a i-ésima derivada parcial de f no ponto a (onde $1 \leq i \leq n$) é o limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

quando tal limite existe.

A transformação linear $f^{'}(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ possui em relação as bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ uma matriz $m \times n$ chamada de matriz **Jacobiana** *de f no ponto a indicada com a notação $J_j(a) = \det f^{'}(a)$.*

Teorema 1.1.1. (Teorema do Valor Médio)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho contínuo, diferenciável no intervalo aberto(a, b). Se $|f^{'}(t)| \leq M \ \forall t \in (a, b)$ então $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

Demonstração: Para demonstrar este Teorema utilizaremos os seguintes resultados:

Lema 1.1.1. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $c \in I$. Dadas as sequências de números $a_k \neq b_k$ em I com $a_k \leq c \leq b_k$ e $\lim a_k = c = \lim b_k$ tem-se*

$$f^{'}(c) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}$$

Lema 1.1.2. *Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas e diferenciáveis em (a, b). Se $|f^{'}(t)| \leq \varphi^{'}(t)$ e $\varphi^{'}(t) > 0 \ \ \forall t \in (a, b)$ então*

$$|f(b) - f(a)| \leq \varphi(b) - \varphi(a)$$

A desigualdade do Valor Médio segue-se do lema 1.1.2 tomando $\varphi(t) = M.t$ pois note que $\varphi^{'}(t) = M$. Assim,

$$|f^{'}(t)| \leq \varphi^{'}(t) = M \ \ e \ \ M > 0 \ \forall t \in (a, b)$$

então

$$|f(b) - f(a)| \leq \varphi(b) - \varphi(a)$$

por fim temos

$$|f(b) - f(a)| \leq M.b - M.a = M(b - a)$$

Vejamos agora algumas definições importantes para resultados posteriores.

Definição 1.1.2. *Um caminho num conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um aplicação contínua $g : I \longrightarrow X$ definida num intervalo I.*

Definição 1.1.3. (homeomorfismo)

Dados os conjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, um homeomorfismo entre X e Y é uma bijeção contínua $f : X \longrightarrow Y$, cuja inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é contínua. Diz-se então que X e Y são conjuntos homeomorfos.

Definição 1.1.4. (Difeomorfismo) *Uma função $f : I \longrightarrow J$ é um difeomorfismo quando é regular, isto é, quando $f^{'}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ e sobregetora.*

Definição 1.1.5. *Uma função real $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diz-se de classe C^1 quando existem, em cada ponto $x \in U$, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ e as n funções $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definidas são contínuas. Mais geralmente $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k quando ela possuir derivadads pariais em todos os pontos de U e as funções $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ forem de classe C^{k-1}.*

Enunciemos agora um resultado utilizado ao longo desse trabalho.

Teorema 1.1.2. (Teorema da função implícita)

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, se um ponto $p = (x_0, y_0) \in U$ é tal que $f(p) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, então existe uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ tais que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : B \longrightarrow J$, de classe C^k. Para todo $x \in B$, tem-se,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, x_i(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, x_i(x))}$$

A afirmação de que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ significa que, para cada $x \in I$, existe um único ponto $y \in J$ com $f(x, y) = c$. Põe-se $y = \xi(x)$; a função $\xi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se definida implicitamente no aberto $B \times J$ pela equação $f(x, y) = c$.

Demonstração : Para fixar as idéias, suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que pondo $B = B(x_0, \delta)$ e

$J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, temos $B \times \bar{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B \times \bar{J}$. Então $\forall x \in I$ a função $y \longmapsto f(x,y)$ é estritamente crescente no intervalo $\bar{J}$. Em particular, como $f(x_0, y_0) = c$, temos $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < c \quad e \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon) > c$. Em virtude do Teorema do Valor Intermediário existe para cada $x \in B$ um único $y = \xi(x) \in \bar{J}$ tal que $f(x,y) = c$. Tem-se obrigatoriamente que $y \in J$, portanto $f^{-1}(c) \cap (B \times \bar{J}) = f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Vamos mostrar que ξ é de classe C^k, ou seja, que existe $\xi^{'}(x)$ para todo $x \in I$ e que $\xi^{'} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^{k-1}.

Ora, pondo $k = \xi(x+h) = \xi(x)$, temos $\xi(x+h) = \xi(x) + K$, logo $f(x+h, \xi(x)+k) = f(x, \xi(x)) = c$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe θ, com $0 < \theta < 1$, tal que

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+h, \xi(x)+k) - f(x, \xi(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, \xi(x)+\theta k).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, \xi(x)+\theta k).k \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, \xi(x)+\theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, \xi(x)+\theta k)}$$

Segundo o resultado mostrado abaixo, ξ é contínua. Isto significa que $\lim_{k\to 0} k = 0$. A continuidade das derivadas parciais de f nos dá portanto

$$\xi^{'}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}$$

Se $f \in C^1$, sendo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e ξ contínuas, esta fórmula mostra que $\xi^{'}$ é contínua, logo $\xi^{'} \in C^1$. Se $f \in C^2$ então $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e ξ são de classe C^1. A fórmula que dá $\xi^{'}$ mostra então que $\xi^{'}$ é também de classe C^1, isto é, $\xi \in C^2$. Desse modo temos que se $f \in C^k$ então $\xi \in C^k$. E o Lema usado na demonstração foi:

Lema 1.1.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ $K \subset \mathbb{R}^k$ compacto, $f : X \times K \longrightarrow \mathbb{R}^p$ contínua e $c \in \mathbb{R}^p$. Se $f^{-1}(c)$ é o gráfico de uma aplicação $\xi : X \longrightarrow K$, isto é , para cada $x \in X$ existe um único $y = \xi(x) \in K$ com $f(x, \xi(x)) = c$, então ξ é contínua.*

Vejamos agora alguns resultados que servirão para demonstrar o Teorema da Aplicação Inversa.

Definição 1.1.6. *Uma aplicação* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida no aberto*$U \subset \mathbb{R}^n$ *é dita uma aplicação fortemente difarenciável no ponto* $a \in U$ *quando existe um transformação linear* $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que para* $x, y \in U$, *vale*

$$f(x) - f(y) = T.(x - y) + \rho_a|x - y|$$

onde $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,a)} \rho_a(x, y) = 0$

Teorema 1.1.3. (Regra da Cadeia)*(para aplicações)*

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ *abertos,* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *fortemente diferenciável no ponto* a *com* $f(U) \subset V$, g *diferenciável no ponto* $f(a)$. *Então*
$g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *é diferenciável no ponto* a, *com*
$(g \circ f)^{'}(a) = g^{'}(f(a)) \circ f^{'}(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Corolário 1.1.1. *Seja* $f : U \longrightarrow V$ *uma bijeção de classe* C^k $(k \geq 1)$ *entre abertos* U , $V \subset \mathbb{R}^m$. *Se sua inversa* $f^{-1} : V \longrightarrow U$ *é diferenciável então* $f^{-1} \in C^k$. *Diz-se então que* f *é uma difeomorfismo de classe* C^k.

Teorema 1.1.4. *A aplicação* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é fortemente diferenciável no ponto* $a \in U$, *se, e somente se , é diferenciável nesse ponto e,* $\forall \varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $r_a(x) = f(x) - f(a) - f^{'}(a)(x - a)$ *satisfaz à condição de Lipschitz* $|r_a(x) - r_a(y)| \leq \varepsilon|x - y|$ *para* $x, y \in B(a; \delta)$

Lema 1.1.4. *Seja* $f : U \longrightarrow V$ *um homeomorfismo entre os abertos*
$U, V \subset \mathbb{R}^m$. *Se* f *é diferenciável num ponto* $a \in U$ *e* $f^{'}(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é uma isomorfismo então o homeomorfismo inverso* $f^{-1} : V \longrightarrow U$ *é diferenciável no ponto* $b = f(a)$. *Se* f *é fortemente diferenciável no ponto* a *então* f^{-1} *é fortemente diferenciável no ponto* b.

Teorema 1.1.5. (Teorema da Aplicação Inversa)

Sejam $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *dfinida num aberto* $U \subset \mathbb{R}^m$ *fortemente diferenciável no ponto* $a \in U$ *e* $f^{'}(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *um isomorfismo. (Equivalentemente* $\det J_{f(a)} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)\right) \neq 0$.*) Então* f *é um homeomorfismo de um aberto* V *contendo* a *sobre um aberto* W *contendo* $f(a)$. *O homeomorfismo inverso* $f^{-1} : W \longrightarrow V$ *é fortemente diferenciável em* $f(a)$ *e sua derivada nesse ponto é* $[f^{'}(a)]^{-1}$. *Se* $f \in C^k$ $(k \geq 1)$ *então* V *pode ser tomado de forma que* f *seja um homeomorfismo* $f : V \longrightarrow W$.

Demonstração: O trabalho etá praticamente feito. Basta apenas organizar as peças. Para simplificar a notação suporemos $a = f(a) = 0$ *o que não* *restringe a generalidade. Escrevendo $f(x) = f'(a).x + r(x)$, a diferenciabilidade forte de f assegura graças ao teorema (1.1.4) que existe uma bola aberta V, de centro a tal que $x, y \in V \Rightarrow |r(x) - r(y)| \leq \lambda|x-y|$ com $\lambda.|f'(a)^{-1}| < 1$. portanto f é um homeomorfismo de V sobre o aberto $W = f(V)$ e usando o Lema (1.1.4) temos que a inversa $f^{-1} : W \longrightarrow V$ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$. Agora se $f \in C^k$, a aplicação derivada $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ é contínua. Como o conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ e $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^m)$, a bola V de centro a pode ser tomada tão pequena que $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seja ainda isomorfismo, $\forall x \in V$. Pelo lema (1.1.4)$f^{-1} : W \longrightarrow V$ é diferenciável em todos os pontos de W, logo f é um difeomorfismo.*

Definição 1.1.7. (Integrais Múltiplas)

Um bolo m-dimencional é um produto cartesiano

$$A = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^m$$

de m intervalos compactos $[a_i, b_i]$, cada um dos quais se chama aresta do bloco A. O volume m-dimensional do bloco A é, por definição

$$vol.\, A = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i).$$

Uma partição do bloco A é um conjunto finito do tipo $P = P_1 \times \ldots \times P_m$, onde cada P_i é uma partição do intervalo $[a_i, b_i]$. Sejam agora P e Q partições do bloco A. Diremos que P é mais fina do que Q quando $P \subset Q$. Se $P = P_1 \times \ldots \times P_m$ e $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_m$, tem-se $P \subset Q$ se, e somente se, $P_1 \subset Q_1, \ldots, P_m \subset Q_m$. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real limitada, definida num bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Dada uma partição P de A, a cada bloco $B \subset P$ associaremos os números

$$m_B = \inf\{f(x); x \in B\} \quad e \quad M_B = \sup\{f(x); x \in B\}$$

com os quais definiremos, respectivamente a soma inferior e a soma superior de f relativamente a partição P, pondo

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} m_B\, vol.\, B \quad e \quad S(f;P) = \sum_{B \in P} M_B\, vol.\, B$$

como $m_B \leq M_B$ *para todo* B *tem-se* $s(f;P) \leq S(f;P)$*. temos ainda que refinandos-se uma partição, a soma inferior não diminue e a soma superior não aumenta, ou seja, se* $P\,Q$ *são partições do bloco* $A \subset \mathbb{R}^m$ *com* $P \subset Q$ *e* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função limitada então* $s(f;P) \leq s(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P)$*. Disto conclui-se também que para quaiquer partições* P *e* Q *do bloco* A *e* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tem-se* $s(f;P) \leq S(f;Q)$*. Definiremos agora a integral inferior* $\int_{-A} f(x)dx$ *e a integral superior* $\int_{A}^{-} f(x)dx$ *da função* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, limitada no bloco* A *como sendo*

$$\int_{-A} f(x)dx = \sup_P s(f;P) \quad e \quad \int_{A}^{-} f(x)dx = \inf_P S(f;P)$$

Diremos então que a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, limitada no bloco* A *é integrável quando sua sima inferior for igual à sua soma superior. Definiremos a integral de* f *como*

$$\int_A f(x)dx = \int_{-A} f(x)dx = \int_{A}^{-} f(x)dx$$

Teorema de Sard 1.1.1. *Seja* $f : M \longrightarrow N$ *uma aplição de classe* C^1 *entre superfícies de mesma dimensão m. Seja* S *o conjunto dos pontos* $x \in M$ *nos quais a derivada* $f'(x) : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ *não é um isomorfismo. Então* $f(S)$ *tem medida nula em* N*.*

Os pontos do conjunto S *chamam-se pontos singulares de* f*. Portanto o Teorema de Sard se enuncia assim: a imagem inversa de um conjunto de pontos singulares por uma aplicação de classe* C^1 *tem medida nula.*

Demosntração: Para cada $x \in S$*, tomemos parametrizações* $\psi : V_0 \longrightarrow V$ *em* N*, com* $f(x) \in V$*, e* $\varphi : U_0 \longrightarrow U$ *em* M *com* $x \in V$ *e* $f(U) \subset V$*. Basta provar que, para todo* $x \in S$ *,* $f(U \cap S)$ *tem medida nula em* N*. De fato, da cobertura* $S \subset \cup U$ *extraímos graças ao Teorema de Lindelof uma subcobertura enumerável* $S \subset \cup U_i e$

$$f(S) = f(\cup(U_i \cap S)) = \cup f(U_i \cap S)$$

será uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula em N*. Por outro lado,* $med.\, f(U \cap S) = 0$ *em* $N \Leftrightarrow med\, \varphi^{-1} f(U \cap S) = 0$ *em* $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow$
$med.\, [\psi^{-1} f \varphi(\varphi^{-1}(U \cap S))] = 0$ *em* $\mathbb{R}^m$*. Como* $\varphi^{-1}(U \cap S)$ *é o conjunto dos pontos singulares da aplicação* $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, o teorema de Sard se*

reduz a provar o seguinte: Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Seja $S = \{x \in U\,;\, \det f'(x) = 0\}$.Então $f(S)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

Novamente pelo teorema de Lindelof, U é reunião enumerável de cubos fechados. Logo basta provar que se C é um cubo fechado, de aresta $a > 0$, contido em U, e $T = \{x \in C\,;\, \det f'(x) = 0\}$ então $f(T)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$. Tomemos no espaço $\mathbb{R}^m$. Tomemos no espaço $\mathbb{R}^m$ com a norma euclidiana subdividindo cada uma de suas arestas em k partes iguais, obtemos uma partição de C, cujos blocos são k^m pequenos cubos C_i, de mesma aresta $\frac{a}{k} = \delta$ e volume $\frac{a^m}{k^m} = \delta^m$. SE $x, y \in C_i$, temos $|x-y| \leq m.\delta$. Em cada pequeno cubo C_i tal que $C_i \cap T \neq \emptyset$ escolhemos um ponto $x_i \in C_i \cap T$. A imagem da transformação linear $f'(x_i) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$está contida num subespaço $E_i \subset \mathbb{R}^m$ de dimensão $m-1$. Todos os pontos $f(x_i) + f'(x_i).v\,,\; v \in \mathbb{R}^m$ pertencem ao subespaço afim $L_i = f(x_i) + E_i$, de dimensão $m-1$ em $\mathbb{R}^m$. Para cada $x \in C_i$ podemos escrever

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i).(x - x_i) + r_i(x)$$

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, o inteiro k pode ser tomado tão grande que $\forall C_i$ contendo pontos de T e todo $x \in C_i$, valha $|r_i(x)| < \varepsilon|x - x_i| \leq m.\delta.\varepsilon$ Ora, $\forall x \in C_i$, se $x = \sup\{f'(x)\,;\, x \in C\}$ temos $|f'(x_i).(x - x_i)| \leq c|x - x_i| < m.c.\delta$, logo para todo $x \in C_i$, o ponto $f(x_i) + f'(x_i).(x - x_i)$ pertence a um cubo de centro $f(x_i)$ e aresta $2m\delta c$ em L_i. se considerarmos o paralelepípedo retangular P_i em $\mathbb{R}^m$ que tem esse cubo como seção média e altura $2m\varepsilon\delta$, vemos que vol. $P_i = 2^m m^m c^{m-1}\delta^m\varepsilon = A\delta^m\varepsilon$. A imagem $f(T)$ está contida na reunião de, no máximo, k^m desses paralelepípedos P_i, cuja soma dos volumes não excede $A.k^m.\delta^m.\varepsilon = A.a^m.\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$é arbitrário, vemos que $f(T)$ tem medida nula.

A redução de uma integral sobre um bloco m-dimensional a uma seqência de m integrais de funções de uma variável é um eficaz instrumento de cálculo. Evidentemente, para reduzir uma integral sobre um bloco a sucessivas integrais sobre intervalos basta considerar $A = A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{m+n}$, onde $A_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $A_2 \subset \mathbb{R}^n$ são blocos, e mostrar que toda integral sobre A se obtém integrando-se primeiro sobre A_2 e depois sobre A_1 (ou vice-versa). Isso faz parte do importante "Teorema de Fubini", o qual contém o caso particular que apresentaremos abaixo e que, às vezes, é chamado impropriamente de Fubini.

Teorema 1.1.6. (Teorema da Integração Repetida) *Seja $f : A_1 \times A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável no produto dos blocos $A_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $A_2 \subset \mathbb{R}^n$. Para* *todo* $x \in A_1$, *seja* $f_x : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f_x(y) = f(x,y)$ *e ponhamos*

$$\varphi(x) = \int_{-A_2} f_x(y)dy\,, \quad \psi(x) = \int_{A_2}^{-} f_x(y)dy$$

As funções $\varphi\,,\,\psi : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, *assim definidas são integráveis, com*

$$\int_{A_1} \varphi(x)dx = \int_{A_1} \psi(x)dx = \int_{A_1\times A_2} f(x,y)dxdy,\ \textit{isto é}:$$

$$\int_{A_1\times A_2} f(x,y)dxdy = \int_{A_1} dx \left(\int_{-A_2} f(x,y)dy \right) = \int_{A_1} dx \left(\int_{A_2}^{-} f(x,y)dy \right)$$

Mudança de Variáveis A fórmula de mudança de variáveis para integrais simples é quase automática se $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1, com x varia entre a e b, $h(x)$ vai de $h(a)$ até $h(b)$ obtem-se

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(y)dy = \int_a^b f(h(x))h^{'}(x)dx.$$

Agora, no caso das integrais múltiplas, a fórmula de mudança de variáveis vem com o seguinte resultado:

Teorema 1.1.7. (Mudança de Variáveis) *Sejam* $h : U \longrightarrow V$ *um difeomorfismo de classe* C^1 *entre aberto* $U\,,\,V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ *um compacto J-mensurável e* $f : h(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável. então* $f \circ h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)).|\det h^{'}(x)|dx$$

É importante observar que este é o caso mais geral do Teorema de Mudança de Variáveis. Os casos particulares desse teorema são: a fórmula para mudança linear de variável numa integral superior sobre um intervalo e o caso em que o difeomorfismo h é uma transformação linear invertível.

Capítulo 2

2.1 Unicidade do Grau

Um dos problemas que surgem em nossa área é o problema de encontrar e determinar a raízes de um polinômio. Esse é um caso particular de encontrar uma solução de uma equação da forma $f(x) = y$, onde f é uma função contínua definida em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^n$ e y é um ponto dado em $\mathbb{R}^n$. O nosso interesse aqui é portanto construir uma ferramenta, o grau topológico $d(f, \Omega, y)$ de f com respeito a Ω e a y, que seja útil na investigação dessas equações.

A cada tripla (f, Ω, y) vamos associar um número inteiro $d(f, \Omega, y)$ tal que as propriedades da função d nos permitam encontrar respostas significativas quanto a existênia, unicidade ou multiplicidade de soluções da equação $f(x) = y$.

Naturalmente, se $f = id$, a função identidade em $\mathbb{R}^n$ definida por $id(x) = x$, então $f(x) = y$, em que $y \in \Omega$, tem uma única solução $x = y$, e portanto espera-se que:

d1 $d(id, \Omega, y) = 1 \ \forall y \in \Omega$

Espera-se ainda que d contenha informações sobre a localização das soluções no seguinte sentido. Suponha que Ω_1 e Ω_2 sejam subconjuntos abertos de Ω e que $f(x) = y$ tenha um número finito de soluções em $\Omega_1 \cup \Omega_2$, mas não tenha solução em $\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. então o número de soluções de Ω deve ser o número de soluções de Ω_1 mais o número de soluções de Ω_2. Isso sugere que d tenha a seguinte propriedade:

d2 $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ sempre que Ω_1 e Ω_2 sejam subconjuntos abertos e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ tais que $y \in f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.

Uma terceira e última condição é a de que o cálculo de $d(f, \Omega, y)$, para uma função complicada possa ser feito por meio de $d(g, \Omega, y)$ em que g é uma função mais simples. Por exemplo, se f puder ser continuamente deformada em g sem que no processo ocorram soluções na fronteira de Ω, isto é,

d3 $d(h(t, .), \Omega, y(t))$ independe de $t \in J = [0, 1]$ sempre que $h : j \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ forem contínuas e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$.

Assumindo a existência de uma função d com as propriedades (d1)-(d3) mostraremos que tal função é única.

Vamos introduzir agora alguns conceitos que tornarão menos árdua nossa tarefa. Comecemos introduzindo algumas notações. Para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $|x|$ a norma euclidiana, isto é,

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{A}$ e ∂A denotarão respectivamente, o fecho e a fronteira de A. A distância de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto A será representada por

$$\varrho(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}.$$

A bola aberta de centro x_0 e raio $r > 0$ será denotada por

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$$

e por simplicidade usaremos a notação

$$\overline{B}_r(x_0) = \overline{B_r(x_0)}.$$

Para $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ denotaremos

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \ e \ f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}.$$

aplicações lineares serão identificadas com sua matriz $A = (a_{ij})$ e escrevemos o $\det A$ para o determinante da matriz A. Para $A \subset \mathbb{R}^n$, indicamos por $C(A)$ o conjunto das funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que são contínuas. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, denotamos por $C^k(\Omega)$ o conjunto das funções $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ que são k vezes diferenciáveis em Ω, enquanto $\overline{C}^k(\Omega)=C^k(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ e $\overline{C}^\infty(\Omega)=\bigcap\limits_{k\geq 1}C^k(\Omega)$. No caso em que o conjunto A é compacto, definimos, para $f\in C(A)$, $|f|_0=\max\limits_{\Omega}|f(x)|$. A primeira etapa do nosso trabalho será mostrar que a função d é unicamente determinada por seu valor em funções de classe $\overline{C}^\infty$. Para tanto vamos introduzir o conceito de funções regularizantes.

Seja então $\varphi_1:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} c.\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & ,\, para\ |x|<1\\ 0 & ,\, caso\, contr\acute{a}rio\end{cases}$$

onde $c>0$ é escolhido de forma que $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_1(x)dx=1$ e φ_1 assim definida é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos agora a família de funções $(\varphi_\alpha)_{\alpha>0}$ como sendo

$$\varphi_\alpha(x) = \alpha^{-n}\varphi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) \tag{2.1}$$

Desta forma temos $\varphi_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $supp\,\varphi_\alpha=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n:\varphi_\alpha(x)\neq 0\}}=\overline{B}_\alpha(0)$ além disso uma simples mudançe variável nos permite concluir que $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi_\alpha(x)dx=1$ qualquer que seja $\alpha>0$. Enunciemos agora o nosso primeiro resultado.

Proposição 2.1.1. *1. Seja $A\subset\mathbb{R}^n$ compacto, $f\in C(A)$ e $\varepsilon>0$. Então existe uma função $g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f(x)-g(x)|\leq\varepsilon$ em A.*

2. Sejam $f\in\overline{C}^1(\Omega)$ e $\varepsilon,\delta>0$ tais que

$$\Omega_\delta=\{x\in\Omega:\varrho(x,\partial\Omega)\geq\delta\}\neq 0$$

Então existe $g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|f-g|_0+\max_{\Omega_\delta}|f^{'}(x)-g^{'}(x)|\leq\varepsilon$$

Demonstração: Seja $\tilde{f}$ a extenção contínua de f para todo o $\mathbb{R}^n$ dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.1.1. *seja $A\subset\mathbb{R}^n$ compacto e $f:A\longrightarrow\mathbb{R}^n$ contínua. Então existe uma função contínua $\tilde{f}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x)=f(x)$ para $x\in A$.*

Definimos para $\alpha > 0$, $f_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *como sendo*

$$f_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\xi)\varphi_\alpha(\xi - x)d\xi\,,$$

em que φ_α *é dado por (2.1). Temos ainda que*

$$\frac{\partial (f_\alpha)_i}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial (\varphi_\alpha)_i}{\partial x_j}(\xi - x)\tilde{f}(\xi)d\xi$$

e portanto, lembrando que $\varphi_\alpha \in C^\infty$, *concluimos que* $f_\alpha \in C^\infty$. *Além disso* $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$ *uniformemente em* A *quando* $\alpha \longrightarrow 0$. *De fato, dado* $\varepsilon > 0$, *tomamos uma bola fechada* $B = \overline{B}_r(0)$ *de raio* r *suficientemente grande de forma que* $A \subset B$. *Então* $\tilde{f}$ *restrita a* B *é uniformemente contínua e portanto existe* $\delta > 0$ *tal que* $|\tilde{f}(x+\xi) - f(x)| < \varepsilon$ *para todo* $x \in B$ *e todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $|\xi| < \delta$. *Em particular, para* $x \in A$, *temos que* $|\tilde{f}(x+\xi) - f(x)| < \varepsilon$ *sempre que* $x \in A$ *e* $|\xi| < \delta$. *Seque que, se* $0 < \alpha < \delta$ *e* $x \in A$ *temos*

$$\begin{aligned}
|f_\alpha(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\xi)\varphi_\alpha(\xi - x)d\xi - f(x) \right| = \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x+\xi)\varphi_\alpha(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\alpha(\xi)d\xi \right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x+\xi) - f(x)|\varphi_\alpha(\xi)d\xi = \\
&= \int_{\overline{B}_{\alpha(0)}} |\tilde{f}(x+\xi) - f(x)|\varphi_\alpha(\xi)d\xi = \\
&\leq \varepsilon . \int_{\overline{B}_{\alpha(0)}} \varphi_\alpha(\xi)d\xi = \varepsilon
\end{aligned}$$

Basta então tomar $g = f_\alpha$, *com* α *suficientemente pequeno na parte (1) da proposição.*

A parte (2) basta escolher α *tal que* $g = f_\alpha$ *satisfaça* $|f - g|_0 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ *e também* $\alpha < \delta$. *Em seguida observe que, como*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi + x)\varphi_\alpha(\xi)d\xi$$

então

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi + x)\varphi_\alpha(\xi)d\xi \quad (x \in \Omega_\delta)$$

Uma vez que $f \in \overline{C}^1(\Omega)$, as derivadas parciais de f são uniformemente contínuas em compactos. O resultado segue então de um raciocínio análogo ao da parte (1).

Considere agora $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Uma vez que $\partial\Omega$ é compacto e f é contínua, o conjunto $f(\partial\Omega)$ é compacto, e portanto $\alpha = \varrho(y, \partial\Omega) > 0$. De acordo com a proposição (2.1.1), existe $g \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ tal que $|f-g|_0 < \alpha$. Se definirmos $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $h(t,x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ temos que h é contínua e além do mais

$$\begin{aligned} |h(t,x) - y| &= |(f(x) - y) - t(f(x) - g(x))| \\ &\geq |f(x) - y| - t|f(x) - g(x)| \\ &\geq |f(x) - y| - |f - g|_0 > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Assim aplicando (d3) com $f(x) \equiv y$, temos que $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$, o que conclui a primeira etapa.

O Lema de Sard

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável em $x_0 \in \Omega$. Denotamos o Jacobiano de f no ponto x_0 por $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x_0 é ponto crítico de f se $J_f(x_0) \neq 0$, caso contrário dizemos que x_0 é ponto regular de f. O ponto y é chamado valor singular de f se for imagem de algum ponto crítico, caso contrário é chamado de valor regular.

Denotamos por S_f o conjunto dos pontos críticos de uma função f, isto é,

$$S_f = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}.$$

O objetivo nesta seção é mostrar que se f satisfaz algumas condições então o conjunto $f(S_f)$ é um conjunto pequeno, isto é, tem medida n-dimensional nula. Vejamos alguns resultados preliminares.

Conjuntos de Medida Nula

O conjunto $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ será chamado de retângulo fechado. O retângulo aberto se define de maneira análoga bastando tomar os intervalos abertos. O volume de um retângulo fechado é por definição

$$vol(B) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

Definição 2.1.1. *Um conjunto $x \subset \mathbb{R}^n$ tem medida n-dimensional nula quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter um família enumerável $C_1, C_2, \dots$ de retângulos fechados contidos em $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} vol(C_i) < \varepsilon$$

Naturalmente todo subconjunto de um conjunto de medida nula também tem medida nula.

Teorema 2.1.2. *Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto enumerável. Então X tem medida nula.*

Proposição 2.1.2. *Sejam $f \in \overline{C}^{\infty}(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Se y é um valor regular de f, então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.*

Demonstração: Como y é um valor regular de f, $J_f(x_0) \neq 0$ e o teorema da função inversa ns garante a existência de $U = B_c(x_0)$ tal que $f|_U$ é um homeomorfismo e portanto uma bijeção. Daí segue que para $x_0 \in f^{-1}(y)$, podemos tomar $U = B_c(x_0)$ tal que $f^{-1} \cap B_c(x_0) = \{x_0\}$. Concluímos portamnto que os elementos de $f^{-1}(y)$ são pontos isolados. Suponhamos por absurdo que $f^{-1}(y)$ seja infinito. Então existe $(x_n) \subset \Omega$ uma sequência de pontos distintos em $f^{-1}(y)$. Temos que $(x_n) \subset \overline{\Omega}$. A compacidade de $\overline{\Omega}$ nos garante que existe uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ tal que $x_{n_j} \longrightarrow x_0 \in \overline{\Omega}$. Portanto $f(x_{n_j}) = y$ e como f é contínua, temos que $y = \lim_{n\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x_0)$. Logo $x_0 \in f^{-1}(y)$. Portanto $x_0 \in \overline{\Omega} \bigcap f^{-1}(y)$ e , como $y \notin f(\partial\Omega)$ por hipótese, segue que $x_0 \in \Omega$. Assim obtemos $(x_{n_j}) \subset f^{-1}(y)$ com $x_{n_j} \longrightarrow x_0 \in f^{-1}(y)$, o que contraria o fato de x_0 ser ponto isolado de $f^{-1}(y)$. Logo devemos ter $f^{-1}(y)$ finito.

Mostraremos agora outro resultado que será bastante útil posteriormente.

Proposição 2.1.3. *Sejam $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{C}^{\infty}(\Omega)$ tais que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. então existe $\alpha > 0$ tal que $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0)$ para todo $y \in B_\alpha(y_0)$.*

Demonstração: Se fizermos $\alpha = \varrho(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ teremos $B_{\alpha(y_0)} \cap f(\partial\Omega)) = \emptyset$. Para chegar no resultado pretendido, usaremos a propriedade (d3). Definimos então:

$$h(t,x) = f(x) \quad e \quad y(t) = ty_0 + (1-t)y \quad com \quad y \in B_\alpha(y_0)\,, t \in [0,1]$$

Temos que:

a. *$h(t,x) = f(x)$ é contínua por hipótese.*

b. *$y(t)$ é contínua*

c. *$y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$, Uma vez que $h(t,\partial\Omega) = f(\partial\Omega)$, $y(t) \in B_\alpha(y_0)$ e $f(\partial\Omega) \cap B_\alpha(y_0) = \emptyset$*

Assim concluímos que $d(h(t,x), \Omega, y(t))$ independe de $t \in [0,1]$ e por (d3), segue que

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0) \quad \forall y \in B_\alpha(y_0)$$

Estamos prontos para enunciar e provar o

Lema 2.1.1. (Sard)

Seja $f \in C^1(\Omega)$ e S_f o conjunto dos pontos críticos de f. Então $f(S_f)$ tem medida nula.

Demonstração: Uma vez que todo aberto do $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como união enumerável de cubos fechados e a união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula é suficiente mostrar que, se $Q \subset \Omega$ é um cubo fechado, então $f(S_Q)$ tem medida nula.

Suponha que Q é um cubo fechado de aresta l contido em Ω. Uma vez que Q é compacto e $f^{'}$ é contínua em Q existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f^{'}(c)| \leq c \quad \forall x \in Q$ e além disso $f^{'}$ é uniformemente contínua em Q. Assim dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f^{'}(x) - f^{'}(y)| < \varepsilon \quad \forall x, \overline{x} \in Q \quad tais\ que \quad |x - \overline{x}| < \delta_1$$

Existe também $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta = \frac{l\sqrt{n}}{m} < \delta_1$. Vamos então dividir o cubo Q em m^n subcubos de aresta $\frac{1}{m}$ de modo que a união dos subcubos Q_k resulte no cubo Q original. Uma vez que o diâmetro de um cubo de aresta $\frac{l}{m}$ é $\frac{l\sqrt{n}}{m}$ vemos que

$$|f^{'}(x) - f^{'}(\overline{x})| < \varepsilon \quad \forall x, \overline{x} \in Q_k$$

Definimos a função $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *por*

$$h(t) = f(\overline{x} + t(x - \overline{x}))$$

e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h^{'}(t)dt = \int_0^1 f^{'}(\overline{x} + t(x - \overline{x}))(x - \overline{x})dt$$

Observando que $h(1) - h(0) = f(x) - f(\overline{x})$ *e* $f^{'}(\overline{x})(x - \overline{x}) = \int_0^1 f^{'}(\overline{x})(x - \overline{x})dt$ *obtemos*

$$f(x) = f(\overline{x}) + f^{'}(\overline{x})(x - \overline{x}) + R(x, \overline{x})$$

onde $R(x, \overline{x}) = \int_0^1 |f^{'}(\overline{x} + t(x - \overline{x})) - f^{'}(\overline{x})|(x - \overline{x})dt$ *é tal que, para todo* $x, \overline{x} \in Q_k$,

$$\begin{aligned} |R(x, \overline{x})| &\leq \int_0^1 |f^{'}(\overline{x} + t(x - \overline{x})) - f^{'}(\overline{x})||x - \overline{x}|dt \\ &\leq \varepsilon. \int_0^1 |x - \overline{x}|dt \leq \varepsilon.\delta \end{aligned}$$

Neste ponto suponhamos que $Q_k \cap S_f \neq \emptyset$. *Tomando* $\overline{x} \in Q_k \cap S_f$, *definimos* $A = f^{'}(\overline{x})$, $\tilde{Q}_k = q_k - \overline{x}$ *e* $g : Q_k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *por* $g(y) = f(\overline{x} + y) - f(\overline{x})$. *Observe que* $|y| < \delta \quad \forall y \in \tilde{Q}_k$, $f(Q_k) = g(\tilde{Q}_k) + f(\overline{x})$ *e que*

$$g(y) = Ay + Ry, \quad com \quad |R(y)| = |R(\overline{x} + y, \overline{x})| \leq \varepsilon\delta, \ \forall y \in \tilde{Q}_k$$

Como $\overline{x}$ *é ponto crítico sabemos que* $\det A = 0$, *logo o conjunto* $A(\tilde{Q}_k)$ *está contido num subespaço de dimensão* $n - 1$. *Seja agora* b^1 *um vetor unitário do complemento ortogonal de* $A(\tilde{Q}_k)$.

Completando b^1 *a uma base* $\{b^1, \ldots, b^n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *temos que* $g(y) = \sum_{i=1}^n \langle g(y), b^i \rangle b^i$, *onde esse último somatório nada mais é do que a expressão de* $g(y)$ *nessa nova base ortonormal. Note agora que vale as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned} |\langle g(y), b^1 \rangle| &\leq |R(y)||b^1| \leq \varepsilon\delta && (2.2) \\ |\langle g(y), b^i \rangle| &\leq |\langle A(y), b^i \rangle| + |\langle R(y), b^i \rangle| \leq && (2.3) \\ &\leq c\delta + \varepsilon\delta \quad para \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

as observações feitas até aqui permitem concluir que $g(\overline{Q}_k)$ *está contido em um retângulo* $\overline{J}_k$ *dado por*

$$\overline{J}_k = [-\varepsilon\delta, +\varepsilon\delta] \times [-c\delta - \varepsilon\delta, c\delta + \varepsilon\delta] \times \ldots \times [-c\delta - \varepsilon\delta, c\delta + \varepsilon\delta]$$

cujo volume é $vol(\overline{J}_k) = 2\varepsilon\delta[2\delta(c+\varepsilon)]^{n-1}$. *Como* $f(Q_k) = g(\overline{Q}_k) + f(\overline{x})$ *concluimos que* $f(Q_k)$ *está contido num retângulo* J_k *contendo* $f(\overline{x})$ *e cujo volume é o mesmo de* $\overline{J}_k$. *Uma vez que* $S_f(Q) \subset Q_1 \cup Q_2 \bigcup \ldots \cup Q_{m^n}$ *temos que o conjunto dos retângulos* J_k *definidos acima cobre* $f(S_f(Q))$ *e, além do mais,*

$$\sum_{k-1}^{m^n} vol(J_k) = 2^n\varepsilon\delta^n m^n[c+\varepsilon]^{n-1} = 2^n\varepsilon(l\sqrt{n})^m[c+\varepsilon]^{n-1}.$$

Uma vez que $\varepsilon > 0$ *é arbitrário concluímos que* $f(S_f(Q))$ *tem medida nula. O lema de Sard e a proposição (2.1.2) nos permitem concluir que, quando vamos calcular* $d(f,\Omega,y)$ *podemos assumir que* y *é um valor regular de* f.

Redução ao Caso Linear

Apresentaremos agora um resultado, decorrente da segunda propriedade do grau (d2).

Lema 2.1.2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado,* $f \in C(\overline{\Omega})$ *e* $y \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $y \notin f(\partial\Omega)$*, então:*

(a) $d(f,\Omega,y) = 0$

(b) *Se* Ω_1 *é um subconjunto aberti de* Ω *e* $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$ *então* $d(f,\Omega_1,y) = d(f,\Omega,y)$

(c) *Se* $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$, $y \not\in \mathrm{f}(S_f(\Omega))$ *e* $f^{-1}(y) = \emptyset$, *então* $d(f,\Omega,y) = 0$

Demonstração: De fato, fazendo $\Omega_1 = \Omega$ *e* $\Omega_2 = \emptyset$ *em (d2), temos que* Ω_1, Ω_2 *são subconjuntos abertos de* Ω *e também* $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \bigcup \Omega_2)) = f(\partial\Omega)$. *Portanto*

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y) + d(f,\Omega_2,y) = d(f,\Omega,y) + d(f,\emptyset,y)$$

donde segue que $d(f,\emptyset,y) = 0$.

Para demonstrar (b) considere Ω_1 *como acima e* $\Omega_2 = \emptyset$. *Obtemos de (d2) que*

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y) + d(f,\emptyset,y) = d(f,\Omega_1,y)$$

Para (c) note que temos $f^{-1}(y) = \emptyset$ *se, e só se,* $y \notin f(\overline{\Omega})$. *Definindo* $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$ *temos* $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$ *e portanto, por (d2),* $d(f,\Omega,y) = d(f,\emptyset,y) + d(f,\emptyset,y) = 0$.

Estamos prontos agora para demonstrar um dos principal resultado

Proposição 2.1.4. *Sejam* $f \in \overline{C}^{\infty}(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega \cup S_f(\Omega))$ *e* $f^{-1}(y) = \{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$.*Então existe* $r > 0$ *tal que*

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{i=1}^{m} d(f^{'}(x^i), B_r(0), 0)$$

Demonstração: Como $f^{-1}(y)$ *é finito, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$f^{-1}(y) \subset \cup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(x^i),$$

em que as bolas $B_\varepsilon(x^i)$ *são duas a duas disjuntas. Utilizando a Fórmula de Taylor obtemos que*

$$f(x) \quad = \quad f(x^i) + f^{'}(x^i)(x - x^i) + \omega(x - x^i) \tag{2.4}$$

onde $\lim\limits_{|x-x^i|\to 0} \dfrac{\omega(x-x^i)}{|x-x^i|} = 0$. *Por outro lado do item (b) do lema acima segue que*

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{i=1}^{m} d(f, B_\varepsilon(x^i), y)$$

e usaremos a proposição (2.1.2) para mostrar que, para δ *suficientemente pequeno,*

$$d(f, B_\delta(x^i), y) = d(f^{'}(x^i)(x - x^i), B_\delta(x^i), 0).$$

De fato, seja $A = f^{'}(x^i)$. *Como* $\det A \neq 0$ *segue que* A *é inversível e portanto* $|x| = |A^{-1}Ax| \leq |A^{-1}||Ax|$. *Assim* $|Ax| \geq c|x|$ *com* $c = |a^{-1}|^{-1}$. *Por (2.1.2) temos que dado* $\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{|\omega(x - x^i)|}{|x - x^i|} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{sempre que} \quad |x - x^i| < \delta$$

Assim para $x \in B_\delta(x^i)$, *definimos* $y(t) = ty$ *e*

$$h(t,x) = tf(x) + (1-t)A(x-x^{'}) = ty + A(x-x^{'}) + t\omega(x-x^{'}).$$

Temos que $y(t)$ *e* $h(x,t)$ *são contínuas. Mostraremos agora que* $y(t) \notin h(t, \partial B_\delta(x^i))$ *qualquer que seja* $t \in [0,1]$. *De fato, temos que* $|h(t,x) - y(t)| = |A(x-x^i) + t\omega(x-x^i)|$*e lembrando que* $|A(x-x^i)| \geq c|x-x^i|$ *obtemos*

$$\begin{aligned} |A(x-x^i) + t\omega(x-x^i)| &\geq c|x-x^i| - |\omega(x-x^i)| > \\ &> \left(c - \frac{c}{2}\right)|x-x^i| = \frac{c}{2}\delta > 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$ *e* $|x-x^i| = \delta$. *Aplicando (d3) obtemos*

$$d(f, B_\delta(x^i), y) = d(A(x-x^i), B_\delta(x^i), 0) \tag{2.5}$$

Seja $r > 0$ *tal que* $B_\delta(x^i) \subset B_r(0)$. *Como* x^i *é única solução de* $Ax - Ax^i = 0$ *podemos usar novamente o resultado (b) do lema (2.1.2)para obter*

$$d(A(x-x^i), B_\delta(x^i), 0) = d(A(x-x^i), B_\delta(0), 0) \tag{2.6}$$

Considere $h : [0,1] \times B_r(0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida por* $h(t,x) = A(x - tx^i)$ *e* $y(t) = 0$. *Naturalmente* $y(t)$ *e* $h(x,t)$ *são contínuas e,como* $|x^i| < r$, $A(x - tx^i) \neq 0$ *para todo* $x \in \partial B_r(0)$ *e todo* $t \in [0,1]$, *logo* $0 \notin h(t, \partial B_r(0))$. *Usando (d3) novamente temos*

$$d(A(x-x^i), B_r(0), 0) = d(A(x-x^i), B_r(0), 0)$$

A expressão acima, (2.5) e (2.6) nos permitem concluir que

$$d(f, B_\delta(x^i), y) = d(f^{'}(x^i), B_r(0), 0).$$

A partir de agora daremos o passo final para a demonstração da unicidade da função d.

O caso Linear

Além de concluir a demonstração da unicidade da função d vamos verificar que $d(A, B_r(0), 0)$ é unicamente determinado se A é uma transformação linear com $\det A \neq 0$. Mais especificamente, vamos mostrar que $d(a, B_r(0), 0) = sgn \det A$, concluindo assim a prova da unicidade. Para tanto vamos fazer uso do seguinte resultado de Álgebra Linear.

Proposição 2.1.5. *Seja A uma matriz $n \times n$ real com $\det A \neq 0$, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ os autovalores negativos de A e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ suas multiplicidades com zeros de $\det(a - \lambda id)$, assumindo que a tenha tais autovalores. Então $\mathbb{R}^n$ é a soma direta de dois subespaços N e M, $\mathbb{R}^n = N \oplus M$, tais que:*

(a) *M e N são invariantes por A;*

(b) *$A\,|_N$ tem somente os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ e $A\,|_M$ não tem autovalores negativos;*

(c) *$dim\, N = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.*

Demonstração: Uma vez que

$$\det(A - \lambda id) = (-1)^n \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^{n} (\lambda - \mu_j)^{\beta_j}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^n \prod_{k=1}^{m} (-\lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^{n} (-\mu_j)^{\beta_j} \\
&= (-1)^n \prod_{k=1}^{m} |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^{n} (-\mu_j)^{\beta_j} \\
&= (-1)^n (-1)^{n-\alpha} \prod_{k=1}^{m} |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^{n} (\mu_j)^{\beta_j} \\
&= (-1)^{\alpha} \prod_{k=1}^{m} |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^{n} (\mu_j)^{\beta_j}
\end{aligned}$$

e portanto $sgn\, \det A = (-1)^{\alpha}$, onde $\alpha = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = dim\, N$.

agora se A não tem autovalores negativos então $\det(tA + (1-t)id) \neq 0$ em $[0,1]$. De fato, suponhamos que $\det(tA + (1-t)id) = 0$ para algum $t \in [0,1]$. Naturalmente devemos ter $t \in (0,1)$, e neste caso temos

$$0 = \det(tA + (1-t)id) = t^n \det\left(A + \frac{1-t}{t} id\right),$$

ou seja, $\frac{1-t}{t} < 0$ *é autovalor de* A*, o que é absurdo. Então, por (d1) e (d3),* $d(A, B_r(0), 0) = d(id, B_r(0), 0) = 1 = sgn \det A$ *e podemos considerar somente o caso em que* $N \neq \{0\}$*. Denotaremos por* Ω *o conjunto* $B_r(0)$*.*

Passo 1. *Suponhamos que* $\alpha = \dim N$ *é par. Uma vez que* $\mathbb{R}^n = N \oplus M$*, todo* x *tem uma única representação* $x = P_1x + P_2x$ *com* $P_1x \in N$ *e* $P_2x \in M$*. Ficam então definidas as projeções lineares* $P_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$ *e*
$P_2 = id - P_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow M$*. Desta forma* $A = AP_1 + AP_2$ *é uma decomposição direta de* A*, uma vez que pela proposição (2.1.5),* $A(N) \subset N$ *e* $A(M) \subset M$*.*

Vamos agora verificar que

$$h(t, x) = tAx + (1-t)(-P_1x + P_2x) \neq 0 \quad em \quad [0,1] \times \partial\Omega$$

Para tanto observe inicialmente que $h(0, x) = 0 \Rightarrow P_1x = P_2x$ *e, como* $P_1x = P_2x \in N \cap M = \{0\}$ *devemos ter* $x = 0$*, e portanto* $x \notin \partial\Omega$*. Se* $h(t, x) = 0$ *com* $t \in (0, 1)$ *temos*

$$AP_1x + AP_2x = Ax = \frac{1-t}{t}P_1x - \frac{1-t}{t}P_2x$$

fezendo $\lambda = \frac{1-t}{t} > 0$ *teremos*

$$AP_1x = \lambda P_1x \quad e \quad AP_2x = -\lambda P_2x$$

Utilizando agora a proposição 2.1.5(b) concluímos que $x = 0$*, e portanto* $x \notin \partial\Omega$*. Por fim, se tivermos* $h(1, x) = 0$ *então* $Ax = 0$*, o que implica* $x = 0$*. Desta forma a função hé uma homotopia admissível e, por (d3), tem-se*

$$d(A, \Omega, 0) \;\; = \;\; d(-P_1 + P_2, \Omega, 0) \tag{2.7}$$

uma vez que $\alpha = 2p$ *para algum* $p \geq 1$*, podemos encontrar uma matriz* $B_{\alpha\times\alpha}$ *tal que* $B^2 = -id_N$*. De fato para* $p = 1$*, podemos escolher a rotação* $\frac{\pi}{2}$*, isto é,* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*, e para um* p *geral nós podemos arranjar* p *semelhantes blocos ao longo da diagonal principal, isto é,* $b_{2j-1,2j} = 1 = -b_{2j,2j-1}$ *para* $j = 1, \ldots, p$ *e* $b_{jk} = 0$ *para os demais* j, k*.*

Note que B *possui apenas autovalores complexos. De fato, se* v *é um autovetor de* B *com autovalor* λ*, então*

$$Bv = \lambda v \Rightarrow B^2v = \lambda Bv \Rightarrow -id\, v = \lambda^2 v \Rightarrow -v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 = -1$$

a idéia agora é encontrar homotopias, indicadas por $\longrightarrow$, *tais que*

$$-P_1 + P_2 \longrightarrow BP_1 + P_2 \longrightarrow P_1 + P_2 = id$$

e concluir que

$$d(-P_1 + P_2\Omega, 0) = d(BP_1 + P_2, \Omega, 0) + d(id, \Omega, 0) \tag{2.8}$$

Para a primeira homotopia considere a função

$$h(t, x) = tBP_1x - (1-t)P_1x + P_2x$$

Precisamos mostrar que $h(t,x) \neq 0$ *para* $(t,x) \in [0,1] \times \partial\Omega$. *Conforme observado anteriormente* $h(0,x) = 0 \Rightarrow x = 0$. *Se tivermos* $h(1,x) = 0$ *então* $BP_1x + P_2x = 0 \Rightarrow P_2x = 0$ *e* $BP_1x = 0$. *Uma vez que a matriz* B *é não-singular* ($\det B = 1$) *devemos ter* $P_1x = 0$. *Como as duas projeções se anulam concluimos que* $x = 0$. *Resta analizar o caso em que* $h(t,x) = 0$ *para* $t \in (0,1)$. *Nesta situação obtemos*

$$|tB - (1-t)|P_1x + P_2x = 0.$$

Da expressão acima segue que $P_2x = 0$ *e*

$$BP_1x = \frac{1-t}{t}P_1x.$$

Se tivéssemos $P_1x \neq 0$ *então* $\frac{1-t}{t}$ *seria autovalor de* B, *o que não é possível visto que* B *só possui autovalores complexos. Desta forma* $P_1x = 0$, *logo* $x = 0$. *Assim se* $h(t,x) = 0$ *para algum* $t \in [0,1]$ *então* $x = 0$, *o que nos permite concluir que* $0 \notin h(t, \partial\Omega)$ *para* $t \in [0,1]$. *Desta forma as aplicações* $-P_1 + P_2$ *e* $BP_1 + P_2$ *são homotópicas. Se fizermos agora*

$$h(t,x) = tP_1x + (1-t)BP_1x + P_2x$$

e usarmos o mesmo raciocínio acima concluímos que são também homotópicas as aplicações $BP_1 + P_2$ *e* $P_1 + P_2$. *Unindo o resultado (2.7) e (2.8) obtemos*

$$d(A, \Omega, 0) = d(id, \Omega, 0) = 1 = (-1)^{2p} = sgn\ \det A$$

concluindo assim o caso em que α *é par.*

Passo 2 *Vamos considerar agora o caso em que* α *é impar, isto é,* $\alpha = 2p+1$ *para algum* $p \geq 0$. *Tomando* $\{v^1, v^2, \ldots, v^\alpha\}$ *uma base de* N *definimos*

N_1 como sendo o subespaçøgerador por v^1 e N_2 como o subespaço gerado por $\{v^2, v^3, \ldots, v^\alpha\}$. Fica então estabelecida a decomposição $N = N_1 \oplus N_2$, com $dim\, N_1 = 1$ e $dim\, N_2 = 2p$. Como no caso anterior vamos considerar $\tilde{Q}_1 : N \longrightarrow N_1$ e $\tilde{Q}_2 : id\mid_N - \tilde{Q}_1 \longrightarrow N_2$ as projeções sobre os subespaços em questão. Desta forma temos $P_1 = \tilde{Q}_1 P_1 + \tilde{Q}_2 P_1$. Podemos então proceder como no caso anterior e encontrar homotopias, indicadas por $\longrightarrow$, tais que

$$A \longrightarrow -P_1 + P_2 \longrightarrow -\tilde{Q}_1 P_1 + B\tilde{Q}_2 P_1 + P_2 \longrightarrow -\tilde{Q}_1 P_1 + \tilde{Q}_2 P_1 + P_2.$$

Assim

$$d(A, \Omega, 0) \;=\; d(-Q_1 + Q_2, \Omega, 0) \tag{2.9}$$

onde $Q_1 = -\tilde{Q}_1 P_1$ e $Q_2 = \tilde{Q}_2 P_1 + P_2$. Observe que Q_1 e Q_2 são as projeções referentes à decomposição $\mathbb{R}^n = N_1 \oplus (N_2 \oplus M)$. Como 0 é o único zero de $-Q_1 + Q_2$ podemos substituir $\Omega = B_r(0)$ por qualqur conjunto aberto e limitado que contenha o 0, sem mudar o valor de d. Dado agora $\Omega \subset N_1$ aberto e limitado e $g : \overline{\Omega} :\longrightarrow N_1$ contínua com $0 \notin g(\partial\Omega)$ vamos definir

$$\tilde{d}(g, \Omega, 0) = d(g \circ Q_1 + Q_2, \Omega + \tilde{B}_r(0), 0)$$

segue facilmente de (d1)-(d3) que

($\tilde{d}1$) *$\tilde{d}(id\mid_{N_1}, \Omega, 0) = 1$ se $0 \in \Omega$.*

($\tilde{d}2$) *$\tilde{d}(g, \Omega, 0) = \tilde{d}(g, \Omega_1, 0) + \tilde{d}(g, \Omega_2, 0)$ sempre que Ω_1, Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de Ω e $0 \notin g(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.*

($\tilde{d}3$) *$\tilde{d}(h(t, .), \Omega, 0)$ é independente de $t \in J = [0, 1]$ sempre que $h : J \times \overline{\Omega} \longrightarrow N_1$ é contínua e $0 \notin h(J \times \partial\Omega)$.*

De fato a propriedade ($\tilde{d}1$) é imediata. Para as outras duas basta usar a definição de $\tilde{d}$ e lembrar que Q_1 e Q_2 são as projeções referentes a decomposição $\mathbb{R}^n = N_1 \oplus (N_2 \oplus M)$. Nosso trabalho agora se resume em meostrar que $\tilde{d}(-id\mid_{N_1}, \Omega, 0) = -1$. Daí por (2.1.5) e pela observação que segue tal expressão, podemos concluir que

$$d(A, \Omega, 0) = \tilde{d}(-id\mid_{N_1}, \Omega, 0) = -1 = (-1)^{2p+1} = sgn\, \det A.$$

A idéia então é encontrar uma função f e subconjuntos abertos, limitados e disjuntos Ω_1 e Ω_2 tais $\tilde{d}(f, \Omega, 0) = 0$, $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $g\mid_{\Omega_1}$, é homotópico a $-id\mid_{N_1}$, e $g\mid_{\Omega_2}$ é homotópico a $id\mid_{N_1}$. Estes são os ingredientes do

Passo 3 *sabemos que* $N_1 = \{\lambda v^1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *e podemos sem perda de generalidade, supor que* $|v^1| = 1$. *Considere* $\Omega = \{\lambda v^1 : \lambda \in (-2,2)\}$ *e definida*

$$\Omega_1 = \{\lambda v^1 : \lambda \in (-2,0)\} \quad e \quad \Omega_2 = \{\lambda v^1 : \lambda \in (0,2)\}$$

Considere também a função $f(\lambda v^1) = (|\lambda| - 1)v^1$. *Uma vez que* $f(0) = -v^1 \neq 0$ *temos que* $0 \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. *Construamos agora a homotopia*

$$h(t, \lambda v^1) = t(|\lambda| - 2)v^1 + v^1,$$

e observe que $h(t, \lambda v^1) \neq 0$ *em* $[0,1] \times \partial\Omega$, *pois como* $\partial\Omega = \{-2v^1, 2v^1\}$, *temos* $h([0,1] \times \partial\Omega) = \{v^1\}$. *Assim utilizando* $(\tilde{d}2)$, $(\tilde{d}3)$ *e* $(\tilde{d}2)$ *novamente, podemos escrever*

$$0 = \tilde{d}(v^1, \Omega, 0) = \tilde{d}(f, \Omega, 0) = \tilde{d}(f, \Omega_1, 0) + \tilde{d}(f, \Omega_2, 0) \tag{2.10}$$

Observe agora que $f\,|_{\Omega_1}(\lambda v^1) = -(\lambda + 1)v^1 = -id\,|_{N_1} - v^1$ *possui um único zero* $-v^1 \in \Omega_1 \subset \Omega$, *de forma que*

$$\tilde{d}(f, \Omega_1, 0) = \tilde{d}(-id\,|_{N_1} - v^1, \Omega, 0) = \tilde{d}(-id\,|_{N_1}, \Omega, 0) \tag{2.11}$$

em que a última igualdade segue do fato de $h(t, \lambda v^1) = -\lambda v^1 - v^1 \neq 0$ *em* $[0,1] \times \partial\Omega$. *Um raciocínio completamente análogo mostra que*

$$\tilde{d}(f, \Omega_2, 0) = \tilde{d}(-id\,|_{N_1}, \Omega, 0).$$

esta última expressão combinada com (2.10) e (2.11) nos permitem escrever

$$\tilde{d}(id\,|_{N_1}, \Omega, 0) + \tilde{d}(-id\,|_{N_1}, \Omega, 0) = 0,$$

donde se conclui que $\tilde{d}(-id\,|_{N_1}, \Omega, 0) = -1$, *conforme desejado. Sintetizando todos os resultados e observações deste capítulo temos o seguinte teorema.*

Teorema 2.1.3. (Unicidade do Grau) *Seja* $\mathcal{D}$ *a coleção de todos os subconjuntos abertos e limitados de* $\mathbb{R}^n$ *e*

$$M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \in \mathcal{D},\ f \in C(\overline{\Omega})\, e\, y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)\}.$$

Então existe no máximo uma função $d : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ *satisfazendo as propriedades (d1)-(d3). Além do mais, tais propriedades implicam que* $d(A, \Omega, 0) = sgn\ \det A$ *para aplicações lineares* A *com* $\det A \neq 0 \quad e \quad 0 \in \Omega$.

Referências Bibliográficas

[1] Amann, Herbert *Ordinary Differential Equations*, Berlin; New York: de Gruyter, 1990

[2] Lima, Elon Lages, *Curso de Análise - Volume 2*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides - IMPA 1981

[3] Deimling, Klaus, *Nonlinear Funtional Analysis* , Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985

orientador

bolsista

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PLANO DE TRABALHO PARA O BOLSISTA

INICIAÇÃO AO ESTUDO DA ANÁLISE NÃO LINEAR E APLICAÇÕES

PIBIC-CNPq-UFPB-2002

IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

1. TÍTULO DO PROJETO:

   Iniciação ao Estudo da Análise não Linear e Aplicações

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

   Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I

3. ÁREA DE PESQUISA:

   Análise

4. SUB-ÁREA DE PESQUISA:

   Equações Diferenciais Parciais

5. ORIENTADOR:

   Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

6. COORIENTADOR:

   Prof. Dr. Pedro Hinojosa Vera

6. ORIENTANDA:

   Nadia Pinheiro Nóbrega

7. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

   agosto de 2003 a julho de 2004

INTRODUÇÃO

A teoria do grau é um destes estudos privilegiados da matemática com o qual provamos que o aluno talentoso da graduação é capaz de entrar em contato com conceitos bem sofisticados e trabalhar com eles com certa destreza. A sua aplicabilidade é versátil e reside em várias ciências como Biologia, Engenharia, Física e outras. Motivados por tudo isto escolhemos este tema para desenvolver com a bolsista que a um ano vem estudando de forma satisfaória e contínua. Hoje a estudante se encontra apta a desenvolver e compreender a Teoria do Grau.

O objetivo e o conteúdo específico do projeto destacamos a seguir com detalhes.

OBJETIVO DO PLANO DE TRABALHO

Frequentemente nos deparamos com problemas de encontrar e determinar multiplicidade das raízes de um polinômio. Esse é um caso particilar do problema de encontrar uma solução de uma equação da forma $f(x) = y$, onde f é uma função contínua definida em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com valores em $\mathbb{R}^N$ e y é um ponto dado em $\mathbb{R}^N$. Neste projeto temos como principal **objetivo** a contrução de uma ferramenta, o grau topológico $d(f, \Omega, y)$ de f com respeito a Ω e a y uqe seja útil na investigação dessas equações.

Com este projeto pretendemos também qualificar o aluno para continuar seus estudos futuros em um curso de pós-graduação visando a formação e a informação. Para atingirmos o objetivo específico da pesquisa dividiremos o conteúdo do plano de trabalho em quatro etapas apresentadas abaixo.

Faremos também uso da **metodologia** tradicional, a qual tem sido feita com sucesso nas iniciações à pesquisa em matemática, isto é, realizções de seminários semanais com listas de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

DETALHAMENTO DO PLANO DE TRABALHO

Neste projeto serão estudados alguns aspectos teóricos ligados a análise visando aplicá-los ao estudo de problemas envolvendo equações diferenciais. Iniciamos com uma revisão de alguns conceitos básicos de análise no $\mathbb{R}^N$ que serão fundamentais para o estudo da teoria do grau de Brower. Nesta etapa faremos um estudo dando mais atenção aos aspectos geométricos contidos nestes resultados. Na segunda etapa desenvolveremos a teoria abstrata do grau topológico.

1. Revisão dos principais resultados do Cálculo Avançado
   (a) Aplicações Diferenciáveis
   (b) A Desigualdade do Valor Médio
   (c) O Teorema da Função Inversa
   (d) O Teorema da Função Implícita
   (e) O Teorema de Sard
   (f) Integrais Múltiplas
   (g) O Teorema de Fubini
   (h) O Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais
   (i) O Teoremas da Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias
   (j) Equações Diferenciais Lineares
2. Grau Topológico em Dimensão Finita
   (a) Unicidade do Grau Topológico
   (b) Contrução do Grau Topológico
   (c) Mais Propriedades do Grau Topológico
   (d) O Teorema do Ponto Fixo Brower e Aplicações
   (e) O Teorema de Borsuk e Aplicações
   (f) Propriedades Multiplicativas do Grau
   (g) O Teorema da Separação de Jordan

(h) Teoria do Grau para Aplica¸cões Holomorfas
(i) Índice de um Campo de Vetores
(j) O Grau Topoĺogico em Domínios Ilimitados
(k) Grau Topoĺogico em Espaços de Dimensão Finita
(l) O Teorema de Hopf e Generalizações do Teorema de Borsuk
(m) O Índice de uma Aplicação

3. Aplicações

   (a) Equações Diferenciais Periódicas
   (b) Existência de Soluções Periódicas
   (c) Bifurcação Local para Equações Diferenciais

4. Grau Topológico em Dimenção Infinita

   (a) O Grau Topológico de Leray-Schalder
   (b) Propriedades do Grau Topológico de Leray-Schalder
   (c) Bifurcação local
   (d) Aplicações

CRONOGRAMA DE EXECUÇÃO

O conteúdo deste plano será executado em duas etapas descritas a seguir:

Primeira Etapa: de agosto a novembro de 2003.

Estudaremos alguns conceitos básico de Análise no $\mathbb{R}^N$

Segunda Etapa: de dezembro a maio de 2004.

Desenvolveremos nesta etapa a Teoria do Grau Topológico de Brower e Teoria do Grau de Leray-Schalder

Terceira Etapa: de junho a julho de 2004.

Aplicaremos os conceitos estudados na segunda etapa a problemas específicos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias

Referências Bibliográficas

[1] Amann, Herbert *Ordinary Differential Equations*, Berlin; New York: de Gruyter, 1990

[2] Lima, Elon Lages, *Curso de Análise - Volume 2*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides - IMPA 1981

[3] Deimling, Klaus, *Nonlinear Funtional Analysis* , Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985