

Unversidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

RELATÓRIO FINAL

PROJETO DE PESQUISA INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELÍPTICAS

PIBIC - CNPq - UFPB - 2001/2002

Bolsista: JONATHAS JERÔNIMO BARBOSA
Orientador: JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó

João Pessoa, AGOSTO de 2002

1 SUMÁRIO

1. Identificação do Projeto
2. Introdução
3. Objetivos
4. Metodologia
5. Desenvolvimento
6. Projeto
7. Anexos

2 1.IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

1. TÍTULO DO PROJETO:

Iniciação ao Estudo das Equações Diferenciais Elípticas

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I

3. ÁREA DE PESQUISA:

Análise

4. SUB-ÁREA DE PESQUISA:

Equações Diferenciais Parciais

5. ORIENTADOR:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

6. ORIENTANDO:

Jonathas Jerônimo Barbosa

7. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

de agosto de 2001 a julho de 2002

3 2. INTRODUÇÃO

O presente trabalho é um apanhado geral das atividades desenvolvidas referentes ao projeto de pesquisa (item 5 do sumário, em anexo) do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica, PIBIC/CNPq/UFPb, executado pelo bolsista Jonathas Jerônimo Barbosa (estudante do bacharelado em matemática da UFPb), orientado pelo professor João Marcos Bezerra do Ó (professor adjunto IV da UFPb - CCEN - DM), do período de Agosto de 2001 à julho de 2002.

Conforme nosso projeto a iniciação à pesquisa se deu da seguinte forma: na primeira etapa do trabalho estudou-se resultados básicos das equações diferenciais ordinárias. Uma pequena introdução às Equações Diferenciais Parciais, o Operador de Laplace, os Operadores de Segunda Ordem Elípticos, Equações de Poisson e o Potencial Newtoniano. Já a segunda etapa foi desenvolvido um estudo sobre os conceitos básicos de Análise Funcional tais como espaços de Banach e Hilbert, Operadores Lineares Limitados, estudou-se também a Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev e por fim aplicações tais como Princípio do Máximo, Regularidade das Soluções Fracas entre outras.

As etapas do estudo se caracterisaram por se desenvolver a partir de um problema sugerido pelo orientador onde o bolsista buscava os conceitos e resultados pertinentes ao caso, numa tentativa de solucioná-lo, e depois apresentava esta "teoria" em seminário.

E com isto conseguimos atingir um dos objetivos do projeto que era dar base para o aluno ingressar nos rudimentos da pesquisa. Compreender os resultados básicos sobre os três exemplos clássicos de EDP da Física Matemática, Equação de Onda, do Calor, e de Laplace que era um outro objetivo, foi alcançado por meio de estudos paralelos na tentativa de dominar a teoria básica do estudo das Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

4 3.OBJETIVOS

1. Embasar a formação do aluno para a iniciação à pesquisa;
2. Estudar alguns métodos modernos de Análise Funcional, os quais têm-se mostrado ferramentas importantes na pesquisa de EDP;
3. O estudo do Operador de Laplace;
4. O estudo da Equação de Poisson e do Potencial Newtoniano;
5. Uma introdução a Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev;
6. Compreender os resultados básicos sobre os três exemplos clássicos de EDP da Física Matemática, Equação de Onda, do Calor, e de Laplace.

5 4.METODOLOGIA

A metodologia como já falamos foi a usual, isto é, seminários semanais e listas de exercícios. Ofereceu-se, também, leituras complementares.

6 5.DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

Apresentaremos agora as partes desenvolvidas do projeto e logo em seguida exibiremos os principais resultados obtidos durante o estudo.

Primeira etapa- de agosto 2001 até janeiro de 2002

Foi estudado alguns resultados básicos das Equações Diferenciais Ordinárias; uma introdução as Equações Diferenciais Parciais; o Operador de Laplace; Operadores de Segunda Ordem Elípticos; Equação de Poisson e o Potencial Newtoniano.

Segunda etapa - de fevereiro até julho de 2002

Estudamos uma breve introdução aos conceitos básicos da análise funcional fizemos uma Introdução a teoria das distribuições, espaços de Sobolev e aplicações a alguns problemas elípticos variacionais.

6.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS:

O Teorema da Divergência de Gauss:

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves. Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 em Ω . Então

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F dx dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \tilde{n} ds,$$

onde $\tilde{n}$ é a normal externa unitária.

A EQUAÇÃO DO CALOR: O problema motivador da equação do calor é o da

difusão térmica em barra, apenas considerando-se a sua dimensão longitudinal, isto é, tendo-se isolado a barra ao longo de seu comprimento, permitindo-se, assim, trocas de calor apenas nos seus extremos. No âmbito do nosso estudo e nas condições já expostas, a variação de energia interna da barra será o acréscimo de calor sensível. Em símbolos:

$$[F(x, t) - \nabla(-k(x)\nabla u(x, t))]\Delta t = \rho(x)c(x)[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)]$$

No limite:

$$F(x, t) + \nabla(k(x)\nabla u(x, t)) = \rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, y)$$

EQUAÇÕES DE LAPLACE E POISSON: É notório que toda função complexa

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

satisfaz as condições de Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Rf(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Rf(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial \Gamma f(x,y)}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{array} \right.$$

As funções u e v que satisfazem a relação acima (a equação de Laplace) são chamadas funções Harmônicas. No caso do calor (difusão), quando buscamos soluções estacionárias (independente do tempo), encontramos funções harmônicas (sem fontes de calor e impondo $u_t = 0$). Se permitirmos fontes estacionárias, obtemos a equação de Poisson:-

$$-\Delta u = G(x)$$

EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE: Vamos supor a corda somente sujeita a vibrações transversais e desprovida de resistência a flexão. A 2ª lei de Newton garante que a resultante sobre a corda é igual à soma das forças internas, de tensão, e as forças externas, assim:

$$T_0[\text{sena}(x + \Delta x) - \text{sena}(x)] + F(x, t) = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Ademais, dividindo ambos os membros por Δx e levando tudo ao limite, resulta

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

EQUAÇÕES DE MAXELL: A tabela abaixo lista as equações e seu significado físico:

$\nabla \vec{E}(x, t) = \rho(x, t)$	Carga e campo elétrico
$\nabla \vec{H}(x, t) = 0$	O campo magnético
$\text{rot } \vec{E}(x, t) = -\frac{\mu}{c} \vec{H}_t(x, t)$	Campo elétrico produzido por um campo magnético variável
$\text{rot } \vec{H}(x, t) = \frac{\epsilon}{c} \vec{E}_t(x, t) + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}(x, t)$	Campo magnético produzido por um campo elétrico variável ou uma corrente, ou ambos

6.2 INTRODUÇÃO A CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL:

Espaços Completos:

Seja M um espaço métrico completo. Se toda sequência de Cauchy, em M , é convergente, então diz-se que M é um espaço métrico completo.

Espaços de Banach:

Um espaço vetorial normado completo é chamado Espaço de Banach.

Espaços de Hilbert:

Um espaço vetorial H , munido de um produto interno, e completo com relação à norma induzida por esse produto interno é chamado um Espaço de Hilbert.

6.3 OPERADOR DE LAPLACE:

6.3.1 Princípios de Máximo

Princípio do Máximo Fraco Princípio do Máximo Fraco: Seja o operador elíptico de segunda ordem

$$Lu \equiv a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

onde a matriz a_{ij} é simétrica e estritamente positiva. Assuma que $Lu \geq 0$ ($Lu < 0$) em um domínio limitado Ω e $c(x) = 0$ em Ω . Então o máximo (mínimo) de u é assumido, em princípio, na fronteira de Ω .

Princípio do Máximo Forte Assuma $Lu \geq 0$ e considere x_0 um ponto da fronteira de Ω tal que $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Também suponha que, em uma vizinhança de x_0 , a fronteira de Ω é de classe C^2 e que u é diferenciável em x_0 . Suponha também que

- 1) $c = 0$; ou
- 2) $c \leq 0$ e $u(x_0) \geq 0$; ou ainda
- 3) $u(x_0) = 0$.

Então a derivada de u , avaliada em x_0 na direção normal à fronteira, é estritamente positiva.

Princípio do Máximo Forte: Assuma $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$) em Ω (não necessariamente limitado) e que u não é constante. Se $c = 0$ então u tem máximo (mínimo) no interior de Ω . Se $c > 0$, então u não tem máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de Ω . Independentemente do sinal de c , o máximo (mínimo) de u não pode ser zero no interior.

6.3.2 Teorema da Simetria

Teorema da Simetria: Seja a função $f : R \rightarrow R \in C^1$. Considere a bola $B_R(0) \subset R^n$, na qual tem-se uma solução $u > 0$, de classe $C^2(B)$ da equação

$$\Delta u + f(u) = 0$$

com condição de fronteira $u = 0$ em ∂B

$$u = 0, \text{ em } \partial B$$

Nesses termos, u é radialmente simétrica e estritamente decrescente monótona:

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0 \text{ para } 0 < r < R$$

independentemente da forma de f .

Lema 1. Seja $x_0 \in \partial B \cap \{x_1 > 0\}$. Então, para algum $\delta > 0$ teremos $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$ em $B \cap \{|x - x_0| < \delta\}$.

Demonstração: Se o lema fosse falso, haveria em B uma sequência $\{x_n\}$ com $u_{x_1}(x_j) \geq 0$ e $x_j \rightarrow x_0$. Além disso, uma vez que u é positiva em B e nula na fronteira, devemos ter que $u_{x_1}(x_0) \leq 0$ e, por argumenton de continuidade, encontraremos $u_{x_1}(x_0) = 0$. Já que $u \equiv 0$ em ∂B , todas as derivadas tangenciais se anulam e, uma vez que na direção associada a x_1 está fora do plano tangente, concluimos que o gradiente $\nabla u_x(x_0)$ é nulo também.

Prova-se que a derivada segunda $u_{x_1 x_1}(x_0)$ também é zero mediante o seguinte artifício. Uma vez que $u(x_0) = u_{x_1}(x_0) = 0$ e $u > 0$ em B , teremos que $u_{x_1 x_1}(x_0) > 0$. Por conseguinte, $u_{x_1 x_1}$ também é positiva em uma vizinhança N , pelo que teremos

$$u_{x_1}(y_j) - u_{x_1}(x_j) = \int_{\Gamma} u_{x_1 x_1}(x) dx_1 > 0$$

o que não pode ocorrer, pois $u_{x_1}(x_j) \geq 0$ e $u_{x_1}(y_j) \leq 0$.

Agora suponhamos que $f(0) \geq 0$. Daí,

$$\Delta u + f(u) - f(0) \leq 0$$

e, pelo teorema do valor médio, podemos encontrar uma função $c(x)$ tal que $f(u) - f(0) = c(x)u$. Mas o princípio do máximo forte aplicado a $(-u)$ implica $u_{x_1}(x_0) < 0$ (contradição).

Por outro lado, suponhamos que $f(0) < 0$. Então, $\Delta u(x_0) = -f(0) > 0$. Uma vez que $u = 0$ em ∂B e o gradiente $\nabla u(x_0)$ é nulo, haverá $u_{x_1 x_1}(x_0) = n_1^2 \Delta u(x_0) \neq 0$ (n é a normal unitária a ∂B), ma isso tambe ´m é uma contradição. q.e.d.

Para $\lambda \in R$, seja T_λ o plano $x_1 = \lambda$ e seja $\sum(\lambda) = B \cap \{x_1 > \lambda\}$. Seja $\sum'(\lambda)$ a reflexão de $\sum(\lambda)$ sobre T_λ e x^λ a reflexão de um ponto x em T_λ . Teremos o seguinte:

Lema 2. Assuma que, para algum $\lambda \in [0, R)$ se tenha

$$u_{x_1}(x) \leq 0, u(x) \leq u(x^\lambda) \vee x \in \sum(\lambda)$$

mas de modo que $u(x)$ não é identicamente igual a $u(x^\lambda)$ em $\sum(\lambda)$. Então $u(x) < u(x^\lambda)$ em todos os pontos de $\sum(\lambda)$ e $u_{x_1}(x) < 0$ em $B \cap T_\lambda$.

Demonstração: Seja $v(x) = u(x^\lambda)$ em $\sum'(\lambda)$. Então v satisfaz a equação $\Delta v + f(v) = 0$. Fazendo $w = u - v$ e $c(x)$ verificando $f(v) - f(u) = c(x)w$ (TMV), resulta

$$\Delta w + c(x)w = 0$$

em $\sum'(\lambda)$. Ora, por hipótese temos $w \leq 0$ em $\sum'(\lambda)$ e w não é identicamente zero lá. Além disso, w se anula em $T_\lambda \cap B$, que faz parte da fronteira de $\sum'(\lambda)$. Segue do princípio do máximo forte que $w < 0$ em $\sum'(\lambda)$ e $w_1 > 0$ em $T_\lambda \cap B$. Como $w_1 = -2u_1$ em $T_\lambda \cap B$, conclui-se a demonstração. q.e.d.

Lema 3. Para qualquer $\lambda \in (0, R)$, teremos

$$(*) \quad u_{x_1}(x) < 0, u(x) < u(x^\lambda) \quad \forall x \in \sum(\lambda)$$

Por continuidade temos que $u(x) \leq u(x_0)$ em $\sum(0) = B \cap \{x_1 > 0\}$. O mesmo argumento aplicado a $(-x_1)$ implica que $u(x) \geq u(x_0)$ em $\sum(0)$. Pode-se falar, pois, em uma simetria de u no plano $x_1 = 0$.

Demonstração: Do lema 2, segue que a equação $(*)$ vale para λ bastante próximo de R . Escolhamos um valor crítico (máximo) μ de λ para a equação citada. A continuidade implica que

$$u_{1(x)} < 0, u(x) \leq u(x^\mu) \quad \forall x \in \sum(\mu)$$

Queremos mostrar que $\mu = 0$. Assumindo que $\mu > 0$, teremos, para qualquer ponto $x_0 \in \frac{\sum(\mu)}{T_\mu}$, $x_0^\mu \in B$ e, consequentemente, $0 = u(x_0) \neq u(x_0^\mu)$, pelo que $u(x)$ não é identicamente igual a $u(x^\mu)$ em $\sum(\mu)$, caso em que podemos aplicar o lema 2. Dessa forma, $u(x) < u(x^\mu)$ em $\sum(\mu)$ e $u_1 < 0$ em $B \cap T_\mu$. Então a equação $(*)$ vale para $\lambda = \mu$. Além disso, pelo lema 1 temos que $u_1 < 0$ em uma vizinhança de qualquer ponto de $T_\mu \cap \partial B$ e, assim, cada ponto de $T_\mu \cap B$ possui uma vizinhança na qual $u_{x_1} < 0$. Pela compacidade de $T_\mu \cap B$ deveremos ter $u_1 < 0$ em $\sum(\mu - \varepsilon)$ para ε pequeno.

Como havíamos assumido μ como um valor crítico, haverá uma sequência λ_j e $x_j \in \sum(\lambda_j)$ tal que $\lambda_j \rightarrow \mu$ e

$$u(x_j) \geq u(x_j^{\lambda_j})$$

Haverá convergência de alguma sequência x_j e o limite x estará no fecho de $\sum(\mu)$. No limite, teremos:

$$u(x) > u(x^\mu)$$

o que não poderia valer para x na fronteira ∂B , onde $u(x) = 0$ e $u(x^\mu) > 0$. Mas $(*)$ vale para μ e deveremos, pois, ter $x \in T_\mu \cap B$. Portanto, $x^\mu = x$. Por outro lado, o segmento reto que liga x_j a $x_j^{\lambda_j}$ pertence a B e, por causa da equação $[u(x_j) \geq u(x_j^{\lambda_j})]$ e do (TVM), conterá um ponto y_j tal que $u_1(y_j) \geq 0$. Fazendo j tender ao infinito, teremos $u_1(x) \geq 0$. Contradição! q.e.d.

7 PROJETO:

8 Conteúdo do Projeto de Pesquisa

CRONOGRAMA DE EXECUÇÃO DO PLANO

A duração prevista para o nosso projeto é de doze meses e se propõe o seguinte cronograma:

Primeira etapa- de agosto até janeiro de 2002

Estudaremos: alguns resultados básicos das equações diferenciais ordinárias; uma introdução as equações diferenciais parciais; o operador de Laplace; operadores de segunda ordem elípticos; equação de Poisson e o potencial Newtoniano

Segunda etapa - de fevereiro a julho de 2002

Estudaremos: uma breve introdução aos conceitos básicos da análise funcional; uma Introdução a teoria das distribuições e espaços de Sobolev e aplicações a alguns problemas elípticos variacionais.

CONTEÚDO DO PROJETO DE PESQUISA:

1. Equações Diferenciais Ordinárias

- (a) Existência e Unicidade de Soluções
- (b) Equações Diferenciais Lineares
- (c) Elementos da Teoria de Sturm-Liouville e Problemas de Contorno

2. Equações Diferenciais Parciais

- (a) O Teorema da Divergência de Gauss
- (b) Derivação Sob o Sinal de Integração
- (c) Alguns Exemplos Clássicos de Equações Diferenciais Parciais da Física Matemática
 - i. Equações de Difusão

- ii. Equações Estacionárias
- iii. Equação da Corda Vibrante
- iv. Equações de Maxwell

3. Operador de Laplace

- (a) Princípio do Máximo
- (b) Inequação de Harnack
- (c) Representação de Green
- (d) A integral de Poisson
- (e) O lema de Weyl
- (f) Teoremas de Convergência
- (g) Estimativas Interiores da Derivada
- (h) O Problema de Dirichlet; o Método das Funções Subharmônicas

4. Operadores de Segunda Ordem Elípticos

- (a) O Princípio do Máximo Fraco
- (b) O Princípio do Máximo Forte
- (c) Estimativas Apriori
- (d) A Inequação de Harnack
- (e) Operadores na Forma do Divergente

5. Equação de Poisson e o Potencial Newtoniano

- (a) Continuidade de Hölder
- (b) O Problema de Dirichlet Para Equação de Poisson
- (c) A Estimativa de Hölder Para as Derivadas de Segunda Ordem
- (d) Estimativas na Fronteira
- (e) Estimativas de Hölder Para as Derivadas de Segunda Ordem.

6. Introdução a Conceitos Básicos de Análise Funcional

- (a) Espaços de Banach
- (b) Espaços de Hilbert
- (c) Operadores Lineares Limitados
- (d) O Teorema de Representação Riesz

- (e) A Alternativa de Fredholm
- 7. Uma Introdução a Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev
 - (a) Distribuições
 - i. Definição e Propriedades das Distribuições
 - ii. Partição da Unidade
 - iii. Transformada de Fourier e Distribuições Temperadas
 - (b) Espaços de Sobolev
 - i. Definição e Propriedades
 - ii. Comportamentos na Fronteira
 - iii. O Espaço Dual
 - (c) Aplicações
 - i. Formulação Variacional de Alguns Problemas Elípticos
 - ii. Regularidade das Soluções Fracas
 - iii. Princípio do Máximo
 - iv. Autofunções e Decomposição Espectral

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. References

- [1] L. Bers, F. John and M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience John Wiley & Sons, 1966.
- [2] Haim Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, Masson Paris, 1987
- [3] Djairo de Figueiredo, Teoria Clássica do Potencial - Editora Universidade de Brasília
- [4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, second edition, Springer-Verlag, 1983.
- [5] Antonio Giglioli, Equações Diferenciais Parciais Elípticas, Notas do 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas 7/26 Julho 1975
- [6] M. Renardy and R. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1993.

8.0.3 Considerações Finais

O bolsista reconhece a importância do Programa de Iniciação Científica

- (1) pelas perspectivas acadêmicas que o PIBIC divisa;
- (2) pela função estratégica de promover a pesquisa na graduação;
- (3) pelo próprio princípio investigativo que propicia à formação do aluno, algo notoriamente importante ao profissional em formação.

O bolsista está certo de que a própria atividade de pesquisa requer criatividade e habilidade psicológicas de relacionamento interpessoal, bem como, naturalmente, esforço intelectual – o que se constitui um interessante exercício de trabalho em equipe, pefigurando os futuros cenários reais do mercado de trabalho.