UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA - JOÃO PESSOA
CENTRO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES - CAJAZEIRAS

Relatório Final

INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Janete Soares de Carvalho
Bolsista pelo Programa PIBIC - Milênio

Everaldo Souto de Medeiros
Orientador

Francisco José de Andrade
Coorientador

Cajazeiras, Agosto de 2003.

1 Introdução

Este relatório expõe um conjunto de atividades exercidas pelo bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica PIBIC - Milênio entre Agosto de 2002 e Julho de 2003. Serão aqui exibidos uma exposição introdutória do projeto: objetivos, metodologia,conteúdo pesquisado e bibliografia utilizada.

Como atividades complementares de grande proveito para o bolsista, ele participou, sendo também palestrante, de um encontro envolvendo todos os integrandes do grupo que forma o "Projeto de Pesquisa Integrado em Análise", coordenado pelo Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, realizado em fevereiro e agosto de 2003.

O bolsista agradece a sua participação neste importante projeto de iniciação científica, patrocinado pelo PIBIC - Milênio, pois reconhece a importância não só acadêmica, mas cultural (por despertar criatividade e interesse em pesquisa no ramo da Matématica) e social (por integrá-lo em grupos de estudantes e professores criando, assim, um novo ciclo de amizades).

Com o apoio do Instituto Milênio ("Projeto Integrado de Pesquisa em Análise", coordenado pelo Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó), o orientando se beneficia dos estudos em grupo, com colegas, professores e pesquisadores ligados a este projeto de pesquisa. Desta forma, criou-se um ambiente científico bastante dinâmico e motivador.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste projeto foi o estudo das Equações Diferenciais Parciais, e portanto, foi necessária um introdução em Anaálise Funcional, afim de embasar o aluno para assuntos mais avançados. As atividades iniciaram-se com os Espaços métricos e normados, Espaços de Banach e de Hilbert, finalizando, de acordo com o previsto, com o estudo dos Espaços de Sobolev e aplicações em Equações Diferenciais Parciais.

Vale salientar também que um projeto desta natureza tem como finalidade introduzir o aluno, ainda em graduação, à pesquisa em Matemática, abrindo, assim, as portas para uma futura pós-graduação.

1.2 Metodologia

-Encontros semanais para discussão de conteúdo e/ou apresentação de seminários;
- Leitura de textos da bibliografia.

Agora, vamos expor os resultados estudados e pesquisados nos capítulos a seguir.

2 Espaços Métricos

Neste período de início de atividades, foram estudadas bastantes definições e teoremas referentes ao Capítulo 1 da ref. [1]. Abaixo têm-se um pequeno resumo do que foi trabalhado e discutido ao longo do bimestre inicial. O ponto de partida foram definições, de certa forma novas para o aluno, do que vêm a ser **espaços métricos, sequência de Cauchy, espaços completos**. Foram relembradas outras definições tais como **função contínua, bola aberta, bola fechada, esfera, sequência convergente, ponto de acumulação, feixo de um conjunto**. Todos os teoremas estudados estão abaixo relacionados, bem como algumas definições e resultados interessantes. Sem necessidade de esclarecer novamente daqui para frente, muitos exercícios foram resolvidos de acordo com a teoria exposta neste trabalho.

Definição: *Um **espaço métrico** é um par (E, d) onde E é um conjunto e d uma função definida em $E \times E$ a valores reais, ou seja: $d : E \times E \to \mathbb{R}$. Esta função é chamada de métrica e goza das seguintes propriedades:*

M1. $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in E$;

M2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M3. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetria);*

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(desigualdade triangular);*

Observação:

a) Por indução obtêm-se de 4 uma *desigualdade triangular generalizada*:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n).$$

b) É costumeiro referir-se a um espaço métrico (E, d) apenas por E e proceder-se-á desta forma neste trabalho

Um subespaço de um espaço métrico E consiste em um conjunto $F \subset E$ e a restrição da métrica d ao conjunto $F \times F$. Ou seja, a métrica em F é a restrição $\overline{d} = d|_{F\times F}$.

Exemplos:

1- $\mathbb{R}$ munido da métrica $d(x, y) = |x - y|$

2- Espaço B(A) das funções limitadas.

Cada elemento $k \in B(A)$ é uma função definida e limitada no conjunto A. A métrica apresentada para exemplo é:

$$d(x, y) = \sup_{t\in A} |x(t) - y(t)|$$

3- Espaços $l^p \quad (p \geq 1)$

Por definição, cada elemento $x \in l^p$ é uma sequência $x = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ tal que: $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$.

À este conjunto atribue-se a seguinte métrica:

$$d(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|^p\Big)^{1/p} \tag{1}$$

onde $x = (a_n)$ e $y = (b_n)$

Na tentativa de provar os 4 axiomas de métrica para esta função $d : l^p \times l^p \to \mathbb{R}$, será necessário utilizar a desigualdade de Minkowski:

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i + \beta_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |\beta_i|^p\Big)^{1/p} \tag{2}$$

Interessados na demonstração da mesma devem consultar ref. [1]

De fato:

Claramente d satisfaz as condições M1 até M3 notando-se que a convergência da série à direita da equação (1) é dada por (2) quando $b_i = -\beta_i$

M4 pode ser obtida, usando a desigualdade triangular para números e

(2), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (|a_i - c_i| + |c_i - b_i|)^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j - c_j|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |c_m - b_m|^p\Big)^{1/p} \\ &= d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

onde $z = (c_n)$.

Assim completa-se a prova de que l^p é um espaço métrico

Definição:

*Uma sequência (x_n) num espaço métrico X é dita **convergente** quando ocorrer (para algum $x \in X$):*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0;\ n > n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Costuma-se denotar ($x_n \to x$ quando $n \to \infty$) ou ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$) quando (x_n) é uma sequência convergente

Definição:

Uma sucessão (x_n) num espaço métrico X é dita ***sequência de Cauchy*** *quando:*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0;\ m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Teorema 1 *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Prova: Seja (x_n) uma sequência convergente. Logo: $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_0;\ n > n_0 \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tome agora $m > n_0$. Têm-se pela desigualde triangular que:

$$m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy ■

Nem sempre temos como verdadeira a recíproca desta observação. Quando o é, motiva-se a seguinte

Definição:
Um espaço métrico X é ***completo*** *quando toda sequência de Cauchy em X é convergente*

Teorema 2 *Os espaços métricos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são completos*

Definição:

1. *x_0 é um ponto de acumulação de um conjunto M quando para toda vizinhaça de x_0, existe um $x \neq x_0;\ x_0 \in M$*

2. *seja X um espaço métrico e $M \subseteq X$. Define-se*
   $\overline{M} = \{x \in X;\ \ x \in M\ \ $ *ou x é ponto de acumulação de M*$\}$

Teorema 3 *Seja M um conjunto não vazio de um espaço métrico X e $\overline{M}$ o seu feixo. Então:*

a) $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists\ (x_n)\ \ \text{em}\ \ X;\ x_n \to x$

b) M é fechado $\Leftrightarrow \Big(x_n \to x \Rightarrow x \in M\Big)$, (x_n) *em* X

Prova:
a) Seja $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$ então pegue a sequência da forma $(x, x, ...)$. Se $x \notin M$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ a bola aberta $B_{1/n}(x)$ contém um $x_n \in M$, já que x é ponto de acumulação de M. Portando $x_n \to x$ porque $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$.
Para a recíproca temos que: se $(x_n) \subset M$ e $x_n \to x$ então ou $x \in M$ ou em cada vizinhança de x exite $x_n \neq x$, o que o faz ponto de acumulação de M. Conclue-se, pela própia definição de $\overline{M}$, que $x \in \overline{M}$

b) é trivial pois M é fechado $\Leftrightarrow \overline{M} = M$ ■

Teorema 4 *(Subespaço completo) Um subespaço M de um espaço completo X, é tambêm completo se e somente se M é fechado em X.*

Prova:
$\Rightarrow$. Seja M um subespaço completo e x um ponto de acumulação deste conjunto. Por (3[a]) existe uma sequência (x_n) em M que converge para x. Por (1) esta sequência é de Cauchy. Como M é um subespaço completo, este x deve estar em M. O que acabou-se de verificar foi: $x \in \overline{M} \implies x \in M$ ou seja, $\overline{M} \subseteq M$. Pela própria definição do feixo, temos também que $M \subseteq \overline{M}$. Logo, $M = \overline{M}$ e portanto, M é fechado.
$\Leftarrow$. M é fechado. Seja então (x_n) um sequência de Cauchy em M. Então (x_n) está em X e portanto $x_n \to x$, pois X é completo. Têm-se assim que $x \in \overline{M}$. Como $\overline{M} = M$ pois M é fechado, conclue-se que M é completo já que (x_n) era uma sequência de Cauchy arbitrária. ■

Exemplos: Agora serão listados alguns exemplos de espaços métricos completos e imcompletos

1. Completude de $\mathbb{R}^n$:
   Sabe-se que se $x \in \mathbb{R}^n$ então $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Para este exemplo, é utilizada a métrica euuclidiana, como usual:
   $$d(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)^2\Big)^{1/2}$$
   onde $y = (\beta_i)$, $\quad i \in \{1, ..., n\}$ *e* $\beta_i \in \mathbb{R}$

Utilizar-se-á a seguinte notaçao
para um elemento $x_m \in \mathbb{R}^n : x_m = (\alpha_i^{(m)})$.

Seja então (x_m) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Logo:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ m_0; \ \ m, r > m_0 \Rightarrow d(x_m, x_r) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)})^2\Big)^{1/2} < \varepsilon$$

elevando ao quadrado ambos os membros, têm-se:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)})^2 < \varepsilon^2$$

como têm-se um somatório de números positivos, para cada $i = 1, .., n$, observa-se que:

$$(\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| < \varepsilon$$

Daí segue-se que $\big(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, ...\big)$ forma, para cada $i = 1, .., n$, uma sequência de Cauchy de números reais. Pelo teorema (2), estas sequências são convergentes. Faça então $\alpha_i^{(m)} \to \alpha_i$ e construa $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Claramente $x \in \mathbb{R}^n$ e $x_n \to x$. Como (x_n) era uma sequência arbitrária de Cauchy, têm-se a completude de $\mathbb{R}^n$ provada

2. Completude de l^p

   Prova:

   Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço l^p, onde

$$x_m = (\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \dots).$$

   Logo,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists m_0; \ \ m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

   Pela definição da métrica em l^p,

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(n)}|^p\Big)^{1/p} < \varepsilon$$

   Elevando a p,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p \tag{3}$$

Como a série acima é de termos positivos, para cada i, obtêm-se:

$$|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p \implies |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(n)}| < \varepsilon$$

Logo, as sequências $\left(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \dots\right)$ são de Cauchy. Pelo teorema (2) estas sucessões convergem. Faça então $\alpha_i^{(m)} \to \alpha_i$ e construa

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots).$$

Deve-se mostrar agora que $x \in l^p$ e que $x_n \to x$.

Pela equação (3),

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p \qquad\qquad k = 1, 2, \dots$$

Fazendo $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i|^p \leq< \varepsilon^p$$

Agora $k \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i|^p \leq \varepsilon^p$$

Isto mostra que $x_m - x \in l^p$. Pela desigualdade de Minkowski, verifica-se que $x \in l^p$ pois $x = x_m - (x_m - x)$. Também nota-se, extraindo a raíz p-ésima na última desigualdade, que $x_m \to x$.

Conclusão: l^p é um espaço completo, pois (x_m) era uma sequência de Cauchy arbitrária.

3. Considere agora $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todas as funções polinomias definidas em um intervalo Real fechado $A = [a, b]$. Utilizando a função

$$d : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \max_{t \in A} |x(t) - y(t)|$$

verifica-se que $\mathcal{P}(A)$ é um espaço métrico. Porém, este espaço é não completo

Definição: *Sejam $X = (X, d)$ e $Y = (Y, \overline{d})$ espaços métricos. Então:*

a) *Uma função $T : X \to Y$ é uma* ***imersão isométrica*** *quando T preserva a distância entre elementos de X e Y. Isto é:*

$$d(x, y) = \overline{d}(Tx, Ty)$$

b) *Quando existir uma imersão isométrica bijetiva entre dois espaços X e Y, estes espaços são **isométricos**. Também costuma-se dizer que há uma isometria entre X e Y.*

Teorema 5 *Para um espaço métrico $X = (X, d)$ existe um espaço métrico completo $\widehat{X} = (\ \widehat{X}, \widehat{d}\ )$ que contém um subespaço W isométrico a X e denso em $\widehat{X}$. Este espaço é único, exceto por isometrias.*

Prova: Aqui vai uma síntese da demonstração:

Elabora-se portanto os segintes passos:

(a) Construção do espaço $\widehat{X} = (\ \widehat{X}, \widehat{d}\ )$

(b) Criaçao de uma imersão isométrica bijetiva entre X e $W \subseteq \widehat{X}$, tal que $\overline{W} = \widehat{X}$

(c) Demonstração da completude de $\widehat{X}$

(a) Seja $A = \{\ (x_n) \in X; \quad (x_n)$ é de Cauchy $\}$. Define-se a seguinte relação em A:

$$(x_n) \sim (x'_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

Omite-se aqui a demonstração de que isto é uma relaçao de equivalência, já que não é difícil ver que:

i) $\forall\ (x_n) \in A, \quad (x_n) \sim (x_n)$

ii) $(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow (y_n) \sim (x_n)$

iii) $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n) \Rightarrow (x_n) \sim (z_n)$

Têm-se portanto bem definida a idéia de classe de equivalência. Denote $\overline{(x_n)} := \widehat{x}$ e construa:

$$\widehat{X} = \frac{A}{\sim} = \{\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}, \dots\}$$

Defina agora $\widehat{d} : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

onde $(x_n) \in \widehat{x}$ e $(y_n) \in \widehat{y}$.

O primeiro fato a ser explicado é que este limite à direita da equação independe da escolha dos representantes de $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$. Isto é, se $(x'_n) \in \widehat{x}$ e $(y'_n) \in \widehat{y}$ então:

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

Segue adiante a demonstraçao de que $\widehat{d}$ realmente define uma métrica em $\widehat{X}$. Acima de tudo, deve-se verificar a existência deste limite. Note que:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

Logo,

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

Trocando os lugares de m e n e procedendo como acima, obtêm-se:

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

Como (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy, vê-se que $\big(d(x_n, y_n)\big)$ também é de Cauchy, no entanto númerica, portanto convergente.

M1 é trivial pois como d é uma métrica em X, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ é sempre não-negativo, logo $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) \geq 0$.

M2 é verificada usando o fato de que numa relação de equivalência qualquer sabe-se que: $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \sim y$.

M3 é automático pois

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \widehat{d}(\widehat{y}, \widehat{x})$$

Para provar M4 utiliza-se o fato que d é uma métrica em X, logo:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

e portanto, obtêm-se a desigualdade triangular para $\widehat{d}$ fazendo $n \to \infty$

Desta forma gera-se um espaço métrico ($\widehat{X}, \widehat{d}$)

(b) Seja $T : X \to W = T(X) \subseteq \widehat{X}$ uma função que associa, para cada $a \in X$, um elemento $\widehat{a} \in \widehat{X}$ tal que $(a, a, a, \dots) \in \widehat{a}$. Esta função claramete define uma imersão isométrica pois:

$$\widehat{d}(Ta, Tb) = \widehat{d}(\widehat{a}, \widehat{b}) = \lim_{n\to\infty} d(a, b) = d(a, b)$$

já que $(a, a, \dots) \in \widehat{a}$ e $(b, b, \dots) \in \widehat{b}$.

Pela própria definição de W, esta função é bijetiva. Logo X e W são isométricos.

Mostra-se agora que W é denso em $\widehat{X}$

Considere algum $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Pegue então $(x_n) \in \widehat{x}$. Obviamente (x_n) é uma sequência de Cauchy. Logo,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N; \ \ n > N \implies d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Considere também a sequência de Cauchy $(x_N, x_N, \dots)$. Pela definição de T, têm-se que: $Tx_N = \widehat{x}_N \in W$. Portanto:

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}_N) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Isto mostra que para cada vizinhança de $\widehat{x} \in \widehat{X}$ existe um $\widehat{x}_N \in W$. O que quer dizer que W é denso em $\widehat{X}$.

(c) Completude de $\widehat{X}$. Seja $(\widehat{x}_n)$ uma sequência de Cauchy em $\widehat{X}$. O nato de W ser denso em $\widehat{X}$, leva à seguinte afirmação: para cada $\widehat{x}_n$ existe um $\widehat{z}_n \in W$ tal que:

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) < \frac{1}{n}$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\widehat{d}(\widehat{z}_m, \widehat{z}_n) &\le \widehat{d}(\widehat{z}_m, \widehat{x}_m) + \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) + \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) \\
&< \tfrac{1}{m} + \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) + \tfrac{1}{n}
\end{aligned}$$

O que significa que $(\widehat{z}_m)$ é de Cauchy em W. Como existe uma isometria entre W e X, a pré imagem desta sequência também é uma sequência de Cauchy em X: $z_m = T^{-1}\widehat{z}_m$. Faça então $\widehat{x} \in \widehat{X}$ ser a classe que (z_m) pertence. Mostra-se agora que este $\widehat{x}$ é o limite de $(\widehat{x}_n)$ pois:

$$\begin{aligned}
\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) &\le \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) + \widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{x}) \\
&< \tfrac{1}{n} + \widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{x}).
\end{aligned}$$

Note que $(z_m) \in \widehat{x}$ e $(z_n, z_n, \dots) \in \widehat{z}_n$ pois $\widehat{z}_n \in W$. Logo, pela definição de $\widehat{d}$, esta desigualdade fica:

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} (z_n, z_m).$$

Têm-se então que $\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) \to 0$ quando $n \to \infty$, pois (z_m) é de Cauchy, concluindo portanto que $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$. Por ser $(\widehat{x}_n)$ uma sequência de Cauchy arbitrária, prova-se a completude de $\widehat{X}$. $\blacksquare$

Observação: Este espaço é único, exceto por isometrias, pois se existir outro $\widetilde{X}$ atendendo as condições do teorema (5), então $\widetilde{X}$ é isométrico com $\widehat{X}$

Para melhor aproveitamento das atividades relacionadas aos próximos tópicos, fez-se necessária uma substancial revisão em Álgebra Linear e esta foi feita sem que precise expô-la neste trabalho. Portanto, definições básicas como **espaços vetoriais**, **subespaços**, **transformaçẽs lineares**, **dependência linear**, **indepêndencia linear**, **base** e **dimensão** serão aqui omitidas pois este não é o objetivo deste relatório. Também teoremas básicos derivados das definições acima serão mencionados e utilizados.

3 Espaços de Banach e de Hilbert

O estudo avança na introdução de outros novos (e básicos) conceitos e teoremas da Análise funcional. Neste capítulo serão relatadas as definicões de espaços de Bannach e Hilbert, bem como teoremas, proposições e corolários, a fim de embasar o aluno para estudos nos espaços L^p, ferramentas mais que importantes no conhecimento da teoria aplicada na discussão de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais parciais.

Definição: ***(Espaço normado)***

Um espaço vetorial V é normado quando definimos uma função $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ (denominada norma) que, para cada $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|.\|(x) = \|x\|$ goza das seguintes propriedades:

N1. $\|x\| \geq 0$

N2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

N4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Este espaço normado é denotado por $(V, \|.\|)$ ou , mais frequentemente visto, por V

Observação: É fácil verificar que todo espaço normado é um espaço métrico pois, munido de uma norma, pode-se definir uma métrica em V tal como segue:

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

A verificação das 4 propriedades de métrica é feita sem dificuldades e, por exemplo, M4 é assim satisfeita:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\|+\|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$$

Para poder ser utilizada posteriormente, observa-se que N4 implica na desigualdade:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Utilizando esta fórmula, foi provada a continuidade da norma. Ou seja, a norma é uma função contínua que leva x, um elemento de $(V, \|.\|)$, a um valor real $\|x\|$.

Definição: *(**Espaço de Banach**) Um espaço normado é denominado espaço de Bannach quando o mesmo é completo em relação à métrica induzida por sua norma.*

Exemplos: (espaços de Banach) Serão apresentados praticamente os mesmos exemplos utilizados nos espaços métricos, visto que estes espaços são munidos de métricas provenientes de normas definidas nos mesmos.

a) O conjunto $\mathbb{R}^n$, formado por n-tuplas em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial normado. Defina, para $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}$$

Note que esta norma define a já conhecida métrica no conjunto $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2\right)^{1/2}$$

A prova da completude deste espaço já foi vista no capítulo 1 deste relatório.

b) $C[a,b]$ é definido como o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo fechado é de Bannach com a norma dada por:

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} \{x(t)\}$$

Este espaço é de Bannach

c) Espaço l^p defina a norma neste espaço como:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{1/p}$$

A completude já foi provada neste espaço, visto que a métrica utilizada na demonstração é induzida por esta norma.

Pelo que foi visto, é óbvio que todo espaço normado é um espaço métrico pois, a partir de uma norma, sempre podemos definir uma métrica. Mas a pergunta natural é: Será que todo espaço vetorial que possui uma métrica é normado? Ou equivalente: Toda métrica em um espaço vetorial é proveniente de uma norma? A resposta é não e um exemplo disto será dado depois do seguinte teorema, que esclarece o fato:

Teorema 6 *(Invariância por translação) Seja X um espaço vetorial e métrico. A métrica d deste espaço é proveniente de uma norma $\|.\|$ se e somente se d goza das seguintes propriedades:*

1) $d(x+a, y+a) = d(x, y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$

Prova:

$\Rightarrow$. Suponha que d é proveniente de uma norma. Logo:

$$d(x+a, y+a) = \|(x+a) - (y+a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

e,

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x - y)\| = |\alpha| \ \|x - y\| = |\alpha| d(x, y)$$

$\Leftarrow$. Suponha agora que d é uma métrica definida em X e goza das propriedades 1) e 2). Prova-se agora que d é proveniente de uma norma. Defina $\|x\| = d(x, 0)$. Eis a prova de que $\|.\|$ realmente define uma norma em X.

N1. $\|x\| = d(x, 0) \geq 0$

N2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow d(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3. $\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \; \|x\|$

N4. $\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x + y - y, 0 - y) = d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(0, -y) = d(x, 0) + |-1| d(y, 0) = \|x\| + \|y\|$

■

Feito isto, pode-se dar um exemplo de um espaço vetorial e métrico onde a métrica deste espaço não pode ser obtida de uma norma.
Exemplos: Seja $S(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as sequências reais (limitadas ou não). Seja $x = (\alpha_i),\ y = (\beta_i) \in S(\mathbb{R})$. Defina a função d como:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{1 + |\alpha_i - \beta_i|}$$

A prova de que d realmente define uma métrica em $S(\mathbb{R})$ (que de fato é um espaço vetorial) pode ser vista em [1]. Esta função não goza da propriedade 2) do último teorema e portanto, não pode ser obtida de uma norma.

Utilizando o teorema (4) pode-se mostrar, de forma imediata, que:

Teorema 7 *Um subespaço Y de um espaço de Bannach X é completo se e somente se o conjunto Y é fechado em X.*

Prova: Defina a métrica d(x,y) em X como sendo $\|x - y\|$. ■

No começo deste capítulo, foi exposto o teorema que afirma que todo espaço métrico possui um completamento, e isto agora será extendido, na seguinte afirmação:

Teorema 8 *Para um espaŋormado $X = (X, \|.\|)$ existe um espaço de Bannach $\widehat{X} = (\ \widehat{X}, \|.\|_1\ )$ que contém um subespaço W isométrico a X e denso em $\widehat{X}$. Este espaço é único, exceto por isometrias.*

Prova: É óbvio que aqui será usado o teorema (5) pois, como X é um espaço normado, a métrica induzida pela norma o faz um espaço métrico e portanto a ele associa-se um completamento, ou seja, associa-se um espaço métrico completo $\widehat{X}$. Basta agora fazer deste espaço métrico um espaço normado, definindo as operações de adição e produto por escalar e uma norma conveniente.

Seja portanto $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ elementos de $\widehat{X}$. Convém lembrar que estes elementos são classes de equivalência de sequências de Cauchy, e portanto seja (x_n) e

(y_n) representantes destas classes, respectivamente. Defina $(z_n) = (x_n) + (y_n)$. Logo, (z_n) é de Cauchy, pois

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n + y_n - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

Portanto, pode-se definir uma soma em $\widehat{X}$ sendo $\widehat{z} = \widehat{x} + \widehat{y}$. $\widehat{z}$ é tal que $(z_n) \in \widehat{z}$. Prova-se também pela desigualdade triangular da métrica induzida pela norma que esta soma independe da escolha dos representantes de $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$. O produto por escalar também é definido da seguinte forma: Seja $(x_n) \in \widehat{x}$ um representante de $\widehat{x}$. faça $\alpha\widehat{x}$ como sendo a classe de equivalência à qual (αx_n) pertence. Esta operação novamente independe da escolha de representantes. O elemento zero será a classe de equivalência contendo todas as sequências de Cauchy que convergem para zero. Assim demonstra-se que estas duas operações obedecem toda a axiomática de espaço vetorial.

Mais ainda, como X e W são isométricos e $d(x, 0) = \|x\|$, obtêm-se uma norma induzida em W e utilizando o fato de que W é denso em $\widehat{X}$, pode-se extender esta norma para todo o espaço $\widehat{X}$ fazendo $\|\widehat{x}\|_1 = \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{0})$.

■

Esta parte dedica-se ao estudo de algumas interessantes propriedades dos espaços normados de dimensão finita. Para isto enuncia-se um importante lema:

Lema 1 *Seja $x_1, \dots, x_n$ um conjunto LI de vetores em um espaço normado X. Então existe um escalar $c > 0$ tal que para cada combinação linear deste conjunto obtêm-se:*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Com este resultado em mãos não é dificil verificar que:

Teorema 9 *Todo espaço normado X de dimensão finita é completo.*

Prova: Considere qualquer sequência de Cauchy arbitrária (x_m) em X. Seja $dim(X) = n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para o mesmo. Logo, cada elemento desta sequência tem representação única da forma:

$$x_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

Como (x_m) é de Cauchy então segue da definição que para cada $\varepsilon > 0$ encontra-se um índice n_0 tal que: $\|x_m - x_r\| < \varepsilon$ sempre que $m, r > n_0$. Logo, pelo lema (1) vem:

$$\varepsilon > \|x_m - x_r\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}) e_i \right\| \geq c \left(\sum_{i=1}^{n} | \ \alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)} | \right)$$

Ou seja:

$$| \ \alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)} | \leq \sum_{i=1}^{n} | \ \alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)} | < \frac{\varepsilon}{c}$$

para todo $m, r > n_0$. Isto diz que as n sequências $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \ldots)$ são de cauchy sobre os reais ou complexos. Logo, convergem. Admita que $\alpha_i^{(m)} \rightarrow \alpha_i$ e construa:

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

É fácil ver que $x \in X$ e $x_n \rightarrow x$. Portanto X é completo. ■

Teorema 10 *Todo subesespaço finito Y de um espaço normado X é fechado em X.*

Observação: É claro que isto não vale para o caso de dimensão infinita pois do espaço das funções contínuas em um intervalo da reta pode-se retirar o subespaço de todas as funções polinomiais deste intervalo, que não é fechado.

Algo interessante a ser citado é que num espaço normado de dimensão finita X, todas as normas definidas no mesmo levam para a mesma topologia em X, ou seja, os conjuntos abertos de X são os mesmos, indiferente da norma escolhida para se trabalhar no conjunto. Isto decorre da definição e do teorema citados abaixo:

Definição: *Uma norma $\|.\|$ em um espaço vetorial X é dita equivalente a uma norma $\|.\|_0$ em X se existem números positivos a e b tais que para todo $x \in X$, têm-se:*

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

Teorema 11 *Em um espaço normado de dimensão finita, quaisquer duas normas são equivalentes.*

Dando continuidade às atividades no mês de Dezembro, foram estudadas algumas definições e teoremas envolvendo Compacidade. Uma consequência imediata deste trabalho foi a possibilidade de se estudar um importante

Teorema 12 *Se um espaço normado X tem a bola fechada $M = \{ x \mid \|x\| \leq 1\}$ compacta, então X é de dimensão finita.*

Prova: É consequência imediata do Lema de Riesz, que afirma:

Lema 2 *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X. Suponha Y fechado e um subconjunto próprio de Z. Então para cada número real 0 no intervalo $(0,1)$ existe um $z \in Z$ tal que:*

$$\|z\| = 1, \qquad \|z - y\| \geq 0 \quad \textit{para todo } y \in Y.$$

■

Teorema 13 *Sejam X e Y espaços métricos e $T : X \Rightarrow Y$ uma função contínua. Então a imagem de um compacto é também um compacto.*

Daí foram elaborados alguns estudos em caráter revisatório sobre transformações lineares. A teoria estudada é vista como desnecessária a uma exposicão aqui neste relatório, pois acredita-se que esta atividade de revisão não faça parte do objetivo do mesmo. Prossegue-se portanto com a apresentação de algumas definições e alguns teoremas importantes que antecedem a noção de espaço Dual.

Definição: *Operadores lineares limitados*. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear onde $D(T) \subset X$. O operador T é limitado se existe um numéro real c tal que para todo $x \in D(T)$,*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

É definido também:

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \text{com } x \neq 0$$

$\|T\|$ é chamada de norma do operador T. Isso fará sentido mais na frente, quando for definido o espaço vetorial das transformações lineares contínuas de V em W.

É importante notar que, pela definição, vem:

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$$

Este fato será usado frequentemente nas demonstrações dos próximos teoremas a serem exibidos.

Teorema 14 *Se um espaço normado X tem dimensão finita, então todo operador linear definido em X é limitado (independente da dimensão do contradomínio.)*

Este teorema é de fundamental importância no estudo de espaços vetoriais de dimensão finita pois é com a utilização do mesmo que prova-se que todo espaço de Banach de dimensão finita é reflexivo.

Para melhor entendimento do que foi dito acima, é necessária a leitura de algumas novas definições, mais a frente expostas. Porém antes, temos o seguinte:

Teorema 15 ***(Continuidade e Limitação)****. Seja T um operador linear definido em um espaço vetorial X. Então T é contínuo se e somente se T é limitado.*

Um fato interessante, só para efeito de curiosidade, é que para chegarmos a prova de que T é limitado, basta termos a continuidade em um único ponto. Pois, como ser limitado implica em ser contínuo, chegamos a conclusão de que se T for contínuo em um único ponto, T será contínuo.

Definição: *Sejam X, Y espaços vetoriais normados.*

a) $\mathrm{T}(X,Y) = \{T : X \to Y; \quad T \text{ é linear}\}$

b) $B(X,Y) = \{T : X \to Y; \quad T \text{ é linear e limitado}\}$

c) É chamado de funcional linear qualquer operador linear $f : X \to \mathbb{R}$.

d) $V^* = \mathrm{T}(X,\mathbb{R})$. *$V^*$ é chamado de dual algébrico de V*

e) $V^{'} = B(X, \mathbb{R})$. *$V^{'}$ é chamado de dual topológico ou simplesmente dual de V.*

Alguns comentários julgados importantes:

É fácil ver que todos esses conjuntos acima são espaços vetoriais e que particularmente $B(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com a norma definida anteriormente.

Note que num espaço de dimensão finita V, $V^* = V^{'}$.

A importância do dual é devido ao fato de que independente de V ser ou não um espaço de Banach, o dual de V é sempre um espaço de Banach .

Esta última observação decorre imediatamente do próximo teorema.

Teorema 16 *Se Y é um espaço de Banach, então $B(V, Y)$ é um espaço de Banach*

Daí, tomando $Y = \mathbb{R}$ (que é um espaço de Banach), vemos que $V^{'}$ é sempre normado e completo.

Em resumo, neste período iniciou-se atividades de pesquisa numa área de crucial importância para a Análise Funcional, que é o espaço de Hilbert. Crucial pois sua teoria é mais rica do que espaços de Bannach mais gerais. Em um espaço de Hilbert, existem algumas propriedades tais como: (1) A idéia de ortogonalidade; (2) representação de elementos do espaço como uma soma direta de um elemento de um subespaço fechado e outro de seu complementar ortogonal; (3) o teorema da representa¸ao de Riesz que permite identificar cada funcional linear no dual como um produto interno no própio espaço.

Definição: *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo (na norma definida pelo produto interno). Aqui um **produto interno** é uma função $<, >$: X x $X \rightarrow K$ onde K é o corpo onde X está definido; isto é, para cada par de vetores x, y em X é associado um número em K escrito*

$$< x, y >$$

e chamado de produto escalar de x e y, tal que:

1 $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$

2 $< \alpha x, y > = \ \alpha < x, y >$

3 $< x, y > = \overline{< y, x >}$

4 $< x, x > \geq 0; \quad < x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Um produto interno em X define uma norma da seguinte forma:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

e também define uma métrica:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{< x - y, x - y >}$$

Portanto todo espaço de Hilbert é necessariamente um espaço de Banach.

A barra em 3 denota o conjugado complexo e portanto, se estamos falando de espaços veotoriais reais, temos simplesmente como axioma 3 a simetria.

Para realmente provar que $\sqrt{< x, x >}$ define uma norma em um espaço com produto interno, é feito o uso da Desigualdade de Schwarz:

$$| < x, y > | \leq \|x\| \, \|y\|$$

Outro fato a ser mencionado devido a sua aplicabilidade é que uma norma que é proveniente de um produto interno satisfaz a seguinte **identidade do paralelogramo**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

E reciprocamente, se V é um espaço normado tal que a norma satisfaz a igualdade acima, pode-se definir um produto interno nele das seguintes formas:

1. $< x, y > = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
   quando V for um espaço real.

2. $Re(< x, y >) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
   $Im(< x, y >) = \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$
   quando V for um espaço complexo.

Também foi estudado que para qualquer espaço com produto interno X, existe um espaço de Hilbert que possui um subconjunto W denso e isométrico a X. Em outras palavras, pode-se ver que para todo espaço com produto interno, podemos associar de forma única (exceto por isometrias) um espaço de Hilbert correspondente. A necessidade de expor o teorema que afirma tal fato foi descartada pois isto não passa de uma simples consequência do teorema 5 exposto e demonstrado neste relatório.

A partir de então o bolsista iniciou o estudo de uma série de definicões (na verdade bastante intuitivas) necessárias para o entendimento da teoria de **ortogonalidade** e **soma direta**, tais como: **distância de um ponto a um conjunto**; **segmento**; **convexidade de um conjunto**, etc.

Como crucial resultado a ser demasiadamente utilizado daqui para frente, o teorema que segue é de importância fundamental no estudo das aplicações em equações diferenciais parciais, que é o objetivo final deste trabalho.

Teorema 17 ***(Teorema da representação de Riez-Frechet).***
$\forall f \in H^{'}$ $\exists u \in H$ único tal que

$$f(v) = < u, v > \quad \forall v \in H \tag{4}$$

Além disso, é verificada a seguinte igualdade:

$$||z|| = ||f|| \tag{5}$$

A partir de então, iniciam-se as atividades referentes ao segundo semestre da iniciação científica. Deste ponto em diante, o livro base de estudo do aluno passar a ser ([4]), por apresentar mais objetividade no que se diz respeito ao alcance da meta do projeto de pesquisa, que é estudar as aplicações da teoria exposta neste trabalho. O bolsista parte portanto para um importante teorema a ser utilizado na demonstração do tão conhecido **teorema de Stampacchia** e seu corolário, o **teorema de Lax-Milgran**. Optou-se por colocar a demonstração detalhada deste teorema por ter sido ele um tópico apresentado pelo bolsista para o grupo de pesquisa que está engajado.

Teorema 18 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Seja X um espaço métrico completo e seja $F: X \longrightarrow X$ um aplicação tal que*

$$d(Fv_1, Fv_2) \leq \alpha \, d(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \ \ com \ \ \alpha < 1$$

Então F tem um ponto fixo único $u = Fu$.

Demonstração : Considere a sequência

$$(x_2 = F(x_1), x_3 = F(x_2), \ldots, x_n = F(x_{n-1}), \ldots)$$

Então:

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(F(x_m), F(x_{m-1})) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1})$$

Mas

$$d(x_m, x_{m-1}) = d(F(x_{m-1}), F(x_{m-2})) \leq \alpha d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

Logo

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}).$$

E assim

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^{m-1} d(x_2, x_1)$$

Portanto

$$\begin{aligned} d(x_{m+p}, x_m) &\leq d(x_{m+p}, x_{m+p-1}) + d(x_{m+p-1}, x_{m+p-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (\alpha^{m+p-2} + \alpha^{m+p-3} + \ldots + \alpha^{m-1}) d(x_2, x_1) \\ &= (\sum_{k=m-1}^{m+p-2} \alpha^k) d(x_2, x_1) \\ &\leq (\sum_{k=m-1}^{\infty} \alpha^k) d(x_2, x_1) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

pois $\alpha < 1$ e quando $m \longrightarrow \infty$ numa série convergente seu termo geral converge para zero.

logo (x_n) é de Cauchy em M. Portanto convergente. Faça $x_n \longrightarrow x_0$ em M. Como F é contínua então $F(x_n) \longrightarrow F(x_0)$. Mas $F(x_n) = x_{n+1}$ e portanto $F(x_0) = x_0$.

Definição: *Seja $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que*

1. *a é contínua se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||a(u,v)|| \leq C||u|| \, ||v|| \quad \forall u, v \in H$$

2. *a é coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2$$

Utilizando, portanto, estas definições, o teorema do ponto fixo acima demonstrado e o teorema da representação de Riezs-Frechet, pode-se demonstrar o

Teorema 19 (Stampacchia) *Seja* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$*uma forma bilinear, contínua e coerciva. Seja* K *um convexo, fechado e não-vazio. Então dado* $\varphi \in H^{'}$ *existe* $u \in K$ *único tal que*

$$a(u, v-u) \geq < \varphi, v-u > \quad v \in K. \tag{6}$$

Além disso, se a *é simétrica, então* u *pode ser caracterizado pela propriedade*

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u,u) - < \varphi, u > = \min\limits_{v \in K} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v,v) - < \varphi, v > \right\} \end{cases} \tag{7}$$

e por conseguinte temos o

Teorema 20 Lax-Milgran *Seja* a *uma forma bilinear, contínua e coerciva, então para todo* $\varphi \in H^{'}$ *existe* $u \in H$ *único tal que*

$$a(u, v) = < \varphi, v > \quad v \in H \tag{8}$$

Além disso se a *é simétrico então* u *está caracterizado pela propriedade*

$$u \in H \;\; e \;\; \frac{1}{2}a(u,u) - < \varphi, u > = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) < \varphi, v > \right\} \tag{9}$$

4 Espaços L^p

Inicia-se aqui o estudo da teoria básica e necessária para a compreensão do que vem a ser um espaço de Sobolev. Todos os resultados neste capítulo apresentados são utilizados diretamente nesses espaços, tendo em vista que tratar-se-ão de subconjuntos dos espaços L^p. É importante salientar que, apesar do aluno não ter-se iniciado num curso (ou estudo) de Medida de Integração, com o incentivo de seu orientador e a fim de poder atingir seu objetivo final, alguns teoremas e resultados deste tópico não pesquisado foram vistos rapidamente, garantindo assim uma forma rápida e efetiva (porém bastante "ardilosa") de se estudar matemática de qualidade. O aluno se dá por satisfeito pelo conhecimento adquirido com estes conceitos e teoremas, pois é bem sabido que oportunidades futuras estão garantidas para o estudo detalhado de Medida de Integração. Segue portanto, a teoria estudada neste capítulo.

Denota-se Ω como sendo um aberto do $\mathbb{R}^N$ dotado da medida de Lebesgue dx. Designa-se por L^1 o espaço das funções integráveis sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$ cuja norma é dada por:

$$||f||_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Duas funções em L^1 são iguais quando coincidem q.t.p (quase todo ponto), ou seja, exceto num conjunto de medida nula.

Todos os teoremas que abaixo procedem estão aqui expostos por serem de extrema importância na demonstração de resultados cruciais para os espaços L^p e mais precisamente para os espaços de Sobolev, que serão vistos mais adiante em outro capítulo.

Teorema 21 ***(Teorema da convergência monótona de Beppo Levi)***

Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1 tal que

$$\sup_n \int f_n < \infty.$$

Então $f_n(x)$ converge q.t.p. em Ω, isto é, $f_n(x) \to f(x)$ onde $f(x)$ é um limite finito. Além do mais $f \in L^1$ e $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.

Teorema 22 ***Convergência dominada de Lebesgue***

Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1. Suponhamos que:

1. *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;*
2. *existe uma função $g \in L^1$ tal que para cada n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_{L^1} \to 0$

Notação: Denota-se por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas de Ω y com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega \backslash K \textit{ donde } K \subset \Omega \textit{ é um compacto}\}$$

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos e seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável.

Teorema 23 (Tonelli)
Suponhamos que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty$$

para quase todo $x \in \Omega_1$ e que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty$$

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Teorema 24 ***Teorema da densidade***
O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$, quer dizer,

$$\forall f \in L^1 \quad e \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists f_1 \in C_c(\Omega) \;\; tal \;\; que \;\; ||f - f_1||_{L^1} < \varepsilon$$

O teorema acima surge como resultado bastante utilizado em diversas demonstrações de teoremas conseguintes.

Teorema 25 (Fubini)
Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entãopara quase todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \;\; e \;\; \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

Igualmente para quase todo $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \;\; e \;\; \int_{\Omega_1} |F(x,y)|dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

Além disso se verifica

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} |F(x,y)|dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x,y)|dx\, dy$$

Definição: *Denota-se*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \;\; é \;\; mensuravél \; e \quad existe \;\; uma \;\; constante \;\; C \;\; tal \;\; que |f(x)| < C \;\; q.t.p. \;\; em \; \Omega\}$$

Com uma norma definida por

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C \; ; \; |f(x)| \leq C \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega\}$$

Definição: *Seja* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leq p < \infty$; *define-se*

$$L^p = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \ \textit{é mensuravél e}\ |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

E cuja norma é definida por:

$$||f||_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Definição: *Se define*
$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é mensuravél*
e *existe uma constante* C *tal que* $|f(x)| < C$ *q.t.p. em* $\Omega\}$
E a norma é definida por

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C\ ;\ |f(x)| \leq C \ \textit{q.t.p. em}\ \Omega\}$$

Observação: Se $f \in L^\infty$, então

$$|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty} \ \textit{q.t.p. em}\ \Omega$$

De fato, existe uma sequência C_n tal que $C_n \to ||f||_{L^\infty}$ e para cada n, $|f(x)| \leq C_n$ q.t.p. em Ω. Assim ,$|f(x)| \leq C_n \quad \forall x \in \Omega \backslash E_n$ com E_n de medida nula. Se escreve $E = \bigcup_n E_n$ de forma que E é de medida nula $\forall n$ e $\forall x \in \Omega \backslash E$.

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$; se designa por p' o conjugado de p.

Com estas ferramentas pode-se provar que ao utilizarmos os espaços L^p em aplicações futuras, temos a garantia que os mesmos são espaços vetoriais normados e completos, portanto, espaços de Bannach.

Abaixo segue a demonstração da reflexividade dos espaços L^p

Teorema 26 L^p *é reflexivo para* $1 < p < \infty$
A demostração é feita demonstrando-se três etapas distintas:

1. **(Primeira desigualdade de Clarkson)** *Seja* $2 \leq p < \infty$; *se verifica*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_{L^p}^p + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\left(||f||_{L^p}^p + ||g||_{L^p}^p\right) \quad \forall f,g \in L^p (10)$$

2. L^p *é uniformemente convexo, e portanto reflexivo para* $2 \leq p \leq \infty$.

3. L^p *é reflexivo para* $1 < p \leq 2$.

Com os resultados acima obtidos, podemos extender o teorema da densidade já apresentado acima para um teorema mais abrangente:

Teorema 27 *O espaço* $C_c(\Omega)$ *é denso em* L^p *para* $1 \leq p < \infty$.

O aluno precisou estudar uma outra definição e outro lema para poder ter as ferramentas necessárias para a prova deste teorema.

Definição: *Seja* $1 \leq p \leq \infty$; *Uma função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *pertence a* $L^p_{Loc}(\Omega)$ *quando* $f1_k \in L^p(\Omega)$ *para todo compacto* $K \subset \Omega$

Lema 3 *Seja* $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int fu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega) \tag{11}$$

Então $f = 0$ *q.t.p em* Ω

Demonstração do Teorema 27: É sabido que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Suponha então $1 < p < \infty$. Para demonstrar que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ é bastante verificar que se $h \in L^{p'}(\Omega)$ satisfaz

$$\int hu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega),$$

então $h = 0$. Mas $h \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e

$$\int |h1_k| \leq ||h||_{L^{p'}} |k|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e assim pode-se aplicar o Lema 3 para concluir que $h = 0$ q.t.p.

Outro resultado básico e que foi estudado com detalhes numa apresentação feita pelo estudante para o grupo de pesquisa que participa foi o:

Teorema 28 $L^p(\Omega)$ *é separável para* $1 \leq p < \infty$.

Por ter sido bastante discutido e trabalhado, segue aqui um resumo da demonstração:

Designa-se por $(R_i)_{i\in I}$ a família (enumerável) de retângulos R da forma

$$R = \prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[\ \ , \ \ a_k, b_k \in \mathbb{Q} \ \ e \ \ \mathbb{Q} \subset \Omega$$

Se designa por E o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelas funções 1_{R_i} (i.e. as combinações lineares finitas com coeficientes racionais das funçõse 1_{R_i}); de modo que E é enumerável. Demonstremos que E é denso em L^p .

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ fixos. Seja $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que

$$||f - f_1||_{L^p} < \varepsilon.$$

Seja $\Omega^{'}$ um aberto limitado tal que

$$Supp\ f_1 \subset \Omega^{'} \subset \Omega.$$

Como $f_1 \in C_c(\Omega^{'})$, constrói-se uma função $f_2 \in E$ tal que

$$Supp\ f_2 \subset \Omega^{'}$$

e que

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} \ \ q.t.p$$

em $\Omega^{'}$ pois começamos recobrindo $Supp\ f_1$ com um número finito de retângulos R_i sobre os quais a oscilação de f_1 é inferior a

$$\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}.$$

Daí resulta que $||f_2 - f_1||_{L^p} \leq \varepsilon$ e então

$$||f - f_2||_{L^p} < 2\varepsilon.$$

O próximo resultado afirma que existe uma isometria entre o dual do espaço L^1 com o espaço L^∞. Ou seja, ao olharmos para $(L^1)^{'}$, podemos simplesmente utlizar o espaço L^∞

Teorema 29 *Seja* $\varphi \in (L^1)'$. *Então existe* $u \in L^\infty$ *único tal que*

$$< \varphi, f >= \int u\, f \quad \forall f \in L^1.$$

Além do mais temos a igualdade:

$$||u||_{L^\infty} = ||\varphi||_{(L^1)'}$$

Observação: O espaço L^1 não é reflexivo. De fato, suponhamos que $0 \in \Omega$. Consideremos a sequência $f_n = \alpha_n 1_{B(0,\frac{1}{n})}$ com n suficientemente grande para que $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ e $\alpha_n = \left|B(0, \frac{1}{n})\right|^{-1}$ de modo que $||f_n||_{L^1} = 1$. Se L^1 fosse reflexivo existira uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $f \in L^1$ tal que $f_{n_k} \to f$ na topologia fraca $\sigma(L^1, L^\infty)$. Assim pois,

$$\int f_{n_k}\varphi \to \int f\varphi \qquad \forall \varphi \in L^\infty. \tag{12}$$

Quando $\varphi \in C_c(\Omega \backslash \{0\})$ nota-se que $\displaystyle\int f_{n_k}\varphi = 0$ para k suficientemente grande. Resulta de (12) que

$$\int f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \to C_c(\Omega \backslash \{0\})$$

aplicando o Lema 3 no aberto $\Omega \backslash \{0\}$ a função f (restringida a $\Omega \backslash \{0\}$) obtemos que $f = 0$ q.t.p. em $\Omega \backslash \{0\}$. E portanto $f = 0$ q.t.p em Ω. porém se $f \equiv 1$ em (12), resulta que $\displaystyle\int f = 1$, o que é um absurdo.

Façamos um estudo agora das propriedades básicas do L^∞

- A bola unitária fechada B_{L^∞} é compacta na topologia fraca $\sigma(L^\infty, L^1)$
- Se (f_n) é uma sequência limitada em L^∞, pode-se retirar uma subsequência convergente em L^∞ na topologia fraca $\sigma(L^\infty, L^1)$

Porém, L^∞ não é reflexivo (caso contrário, L^1 seria).

O dual de L^∞ contêm L^1 (pois $(L^1)' = L^\infty$) e é estritamente maior que L^1; existem formas lineares contínuas φ sobre L^∞ que não são do tipo

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^\infty \quad com \quad u \in L^1$$

Observação: O espaço L^∞ não é separável.

O lema acima pode ser demonstrado utilizando o

Lema 4 *Seja E um espaço de Banach. Suponhamos que existe uma família $(O_i)_{i\in I}$ tal que*

1. *Para todo $i \in I$, O_i é um aberto não vazio de E.*
2. *$O_i \cap O_j = \varnothing$ se $i \neq j$.*
3. *I não é enumerável.*

Então E não é separável.

Adentramos no penúltimo semestre de nossas atividades estudando resultados de convolução e regularização. Resultados estes bastante utilizados no capítulo posterior na demonstração de uma série de teoremas envolvendo densidades de espaços nos espaços de Sobolev. Como foi anteriormente dito, os espaços de Sobolev são a "teoria final básica"necessária para finalmente estudarmos suas aplicações e, portanto, qualquer resultado anterior que explique o funcionamento e a teoria por trás destes espaços tem prioridade absoluta nesta iniciação à pesquisa científica. Daí a necessidade de se trabalhar este tópico. O material base utilizado continuou (como continuará até o final) sendo a ref. [4].

Notações a serem utilizadas: $C^k(\Omega)$ é definido por ser o espaço das funçoes k vezes diferenciáveis continuamente sobre Ω.

$$\begin{aligned} C^\infty &= \bigcap_k C^k(\Omega) \\ C_c^k(\Omega) &= C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega) \\ C_c^\infty(\Omega) &= C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) \end{aligned}$$

Teorema 30 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ com*
$1 \leq p \leq \infty$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^N$. Define-se como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}$$

Com este teorema em mãos é imediato a

Proposição 1 *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$\int (f * g)h = \int g(\tilde{f} * h)$$

Onde $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

Proposição 2 *Sejam* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$ *(k natural). Então*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \ \ e \ \ D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

Em particular, se $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$, *então*

$$f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Proposição 3 *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$Supp(f * g) \subset Supp\, f \ + \ Supp\, g$$

Isto nos gera portanto a conclusão natural de que se duas funções possuem suporte compacto, então a convolucão delas também possuirá.

Proposição 4 *Sejam* $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$f * g \in C(\mathbb{R}^N)$$

Todas estas proposições acima citadas foram estudas com o objetivo de poder-se definir uma poderosa ferramenta que é o conceito de sequências regularizantes, que, como o próprio nome já diz, tem como objetivo, regularizar uma função L^p de forma que possamos utilizá-la de forma menos complicada.

Definição: *Define-se como sequência regularizante (ou mollifier) qualquer sucessão* (ρ_n) *de funções tal que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad Supp\, \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

É natural após uma definição tão complicada, perguntar-se se realmente existem tais funções. Para isso deve-se provar que de fato podemos construir sequências de funções que satisfaçam tais condições. Basta fixar uma função $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *com* $Supp\ \rho \subset B(0,1)$, $\rho_n \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ e $\int \rho > 0$; *E considerar a sequência* $\rho_n(x) = Cn^N \rho(nx)$ *com* $C = \left(\int \rho\right)^{-1}$

Com estas sequências definidas, os dois resultados adiante são o que realmente nos interessa, pois com eles, por exemplo, provamos teoremas de densidade para os espaços de Sobolev, que serão vistos logo mais.

Lema 5 *Seja* $f \in C(\mathbb{R}^N)$; *então* $\rho_n * f \to f$ *uniformemente sobre todo compacto de* $\mathbb{R}^N$.

Prova. *Seja* $K \subset \mathbb{R}^N$ *um compacto fixo. Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *(que depende de* K *e de* ε*) tal que*

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0,\delta)$$

Tem-se

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy = \int_{B(0,\frac{1}{n})} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy$$

E então, para $n > \dfrac{1}{\delta}$ *e* $x \in K$,

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$$

Por conseguinte, temos o

Teorema 31 *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *com* $1 \leq p < \infty$. *Então* $\rho_n * f \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

O primeiro resultado de densidade que ganhamos com a noção de sequências regularizantes é:

Proposição 5 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto qualquer. Então* $C_c(\Omega)$ *é denso em* $L^P(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$.

5 A Teoria de Riesz-Fredholm e O Espectro de um Operador Compacto

Para estudar a alternativa de Riesz-Fredholm, alguns conceitos de compacidade, operadores compactos, operadores auto-adjuntos e operadores de imagem finita foram trabalhados.

Sejam E e F espaços de Banach. **Definição:** *Diz-se que um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é compacto se $T(B_E)$ é relativamente compacto na topologia forte. Define-se por $\mathcal{H}(E,F)$ o conjunto dos operadores compactos e denota-se*

$$\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}(E,E)$$

Como resultado inicial temos que o conjunto $\mathcal{H}(E,F)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(E,F)$.

Definição: *Um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tem imagem finita se*

$$\dim R(T) < \infty.$$

Para podermos executar uma demonstração da alternativa de Riesz-Fredholm, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 6 (Lema de Riesz) *Seja E um espaço vetorial normado e seja $M \subset E$ um subconjunto fechado tal que $M \neq E$. Então*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in E \quad \textit{tal que} \quad ||u|| = 1 \quad e \quad dist(u,M) \geq 1 - \varepsilon$$

e por consequência o seguinte, e extremamente importante,

Teorema 32 (Riesz) *Seja E um espaço vetorial normado tal que B_E é compacta. Então E é de dimensão finita.*

Teorema 33 (Alternativa de Fredholm) *Seja $T \in \mathcal{H}(E)$. Então*

1. *$N(I-T)$ é de dimensão finita,*
2. *$R(I-T)$ é fechado, e mais exatamente $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$*
3. *$N(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = E$*
4. *$dim\ N(I-T) = dim\ N(I-T^*)$.*

Espectro de um Operador Compacto

Definição: *Seja* $t \in \mathcal{L}(E)$. *O conjunto resolvente é*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ (T - \lambda I) \text{ é bijetiva de } E \text{ sobre } E\}$$

O espectro $\sigma(T)$ *é o complementar do conjunto resolvente,* $\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$.

Dizemos que λ *é valor próprio e escreve-se* $\lambda \in VP(T)$ *se*

$$N(T - \lambda I) \neq 0;$$

$N(T - \lambda I)$ *é dito espaço próprio associado a* λ.

Proposição 6 *O espectro* $\sigma(T)$ *é um conjunto compacto e*

$$\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||].$$

Demonstração : Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $|\lambda| > ||T||$; *mostremos que* $T - \lambda I$ *é bijetiva — e isto provará que* $\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||]$. *Dado* $f \in E$ *a equação* $Tu - \lambda u = f$ *adimite solução única pois a equação escreve-se como* $u = \dfrac{1}{\lambda}(Tu - f)$ *e aplica-se então o Teorema do Ponto Fixo de Banach.Mostremos agora que* $\rho(T)$ *é aberto. Seja* $\lambda_0 \in \rho(T)$. *Dados* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(próximo a* λ_0*) e* $f \in E$ *trata-se de resolver*

$$Tu - \lambda u = f \tag{13}$$

Mas (13) escreve-se $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$ *i.e.*

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u]. \tag{14}$$

Aplicando novamente o Teorema do Ponto Fixo de Banch conclui-se que (14) possui solução única se

$$|\lambda - \lambda_0|\ ||(T - \lambda_0 I)^{-1}|| < 1$$

Desta forma, finalizamos o estudo deste capítulo com o seguinte:

Teorema 34 *Seja* $t \in \mathcal{H}(E)$, *com dim* $E = \infty$. *então temos:*

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\rho(T) \backslash \{0\} = VP(T) \backslash \{0\}$,
3. *Uma das seguintes situações:*
   - $\sigma(T) = \{0\}$,
   - $\sigma(T) \backslash \{0\}$ *é finito,*
   - $\sigma(T) \backslash \{0\}$ *é uma sucessão que tende a zero.*

Finalmente, atingimos no último capítulo de nosso trabalho, que é o tão mencionado espaço de Sobolev e as aplicações tão procuradas.

6 Espaços de Sobolev de Dimensão Um e Suas Aplicações

O estudo começa, novamente, com uma série de definições e resultados que precisam ser expostos neste relatório, para finalmente concluir-se o trabalho do bolsista.

Definição: *Denota-se* $W^{1,p}(I)$ *o conjunto*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I)\ ;\ \exists g \in L^p(I)\ \ tal\ que\ \int_I u\varphi^{'} = -\int_I g\varphi\ \ \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

escreve-se $H^1(I) = W^{1,2}(I)$

Para cada $u \in W^{1,p}(I)$ *denota-se* $u^{'} = g$.

Observação: Na definição de $W^{1,p}(I)$ chamamos φ de uma função teste. Tanto faz utilizarmos $C_c^1(I)$ e $C_c^{\infty}(I)$ como conjunto de funções testes já que se $\varphi \in C_c^1(I)$, então $\rho_n * \varphi \in C_c^{\infty}(I)$ para n suficientemente grande e $\rho_n * \varphi \rightarrow \varphi$ em C^1 ver).

Observação: Se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e se $u^{'} \in L^p(I)$ (aqui $u^{'}$ é a derivada usual de u,) então $u \in W^{1,p}(I)$. Além disso a derivada usual de u coincide com a derivada de u no sentido de $W^{1,p}$. Em particular se I está limitado, então $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

O espaço $W^{1,p}$ está dotado da norma

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + ||u^{'}||_{L^p}$$

ou ás vezes da norma equivalente $[||u||_{L^p}^p + ||u^{'}||_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$. O espaço H^1está dotado do porduto escalar

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u^{'},v^{'})_{L^2}.$$

A norma associada

$$||u||_{H^1} = [||u||_{L^2}^2 + ||u^{'}||_{L^2}^2]^{\frac{1}{2}}$$

é equivalente a norma em $W^{1,2}$.

Daqui para frente, segue-se com os resultados já esperados:

O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $W^{1,p}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço H^1 é um espaço de Hilbert separável.

Após esta série de resultados básicos na teoria de espaços de Sobolev, foi estudado o importante

Teorema 35 *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$; *então existe uma função* $\overline{u} \in C(\overline{I})$ *tal que*

$$u = \overline{u} \quad q.t.p \; em \; I$$

e

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u^{'}(t)\, dt \quad \forall x, y \in \overline{I}$$

Esse teorema afirma que toda função $u \in W^{1,p}$ *adimite um representante contínuo e é único, i.e., existe uma função contínua pertencente a classe de equivalência de* u *para a relação* $u \sim v$ *se* $u = v$ *q.t.p. Sempre que for necessário, substituiremos* u *por seu representante contínuo.*

A demonstração deste teorema se dá através dos dois seguintes lemas:

Lema 7 *Seja* $f \in L^1_{Loc}(I)$ *tal que*

$$\int_I f \, \varphi^{'} = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(I)$$

então existe uma constante C *tal que*

$$f = C \;\; q.t.p.$$

Lema 8 *Seja* $g \in L^1_{Loc}(I)$*; para* y_0 *fixo em* I *e denotando por*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t) dt \quad x \in I$$

temos que $v \in C(I)$ *e*

$$\int_I v\varphi^{'} = -\int_I g\varphi \quad \varphi \in C^1_c(I).$$

O lema 8 nos diz que a primitiva v de uma função de L^p pertence a $W^{1,p}$ sempre que $v \in L^p$ ocorrendo sempre quando I é limitado.

O teorema abaixo nos dá outras caracterizações para funções de Sobolev (ou seja, funções que pertencem ao espaço de Sobolev)

Teorema 36 *Seja* $u \in L^p$ *com* $1 < p \leq \infty$*. As seguintes propriedades são equivalêntes:*

1. $u \in W^{1,p}$.

2. *Existe uma constante* C *tal que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C||\varphi'||_{L^{p'}(I)} \quad \varphi \in C_c^\infty(I).$$

3. *Existe uma constante* C *tal que para todo aberto* $\omega \subset\subset I$ *e todo* $h \in \mathbb{R}$ *com* $|h| < dist\ (\omega, \complement I)$ *verifica-se*

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

Além disso, pode-se escolher $C = ||u'||_{L^p}$ *em (2) e (3.)*

É sabido que algumas operações fundamentais da Análise só têm sentido para as funções definidas em todo $\mathbb{R}$. Assim, poder prolongar uma função $u \in W^{1,p}(I)$ a uma função $\bar{u} \in W^{1,p}\ (\mathbb{R})$, é encarado como uma importante ferramente em toda a teoria de espaços de Sobolev, e , portanto temos o seguinte teorema que possibilita tal prolongamento.

Teorema 37 (Operador de Prolongamento) *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Existe um operador de prolongamento* $P\ :\ W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ *tal que*

1. $Pu_{|_I} = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

2. $||Pu||_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\ ||u||_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

3. $||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\ ||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.
   (donde C *só depende de* $|I| \leq \infty$.*)*

Teorema 38 (Densidade) *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p < \infty$. *Então existe uma sucessão* (u_n) *em* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $u_{n|I} \to u$ *em* $W^{1,p}(I)$.

O teorema acima se faz útil na prova de algumas propriedades das funções de Sobolev, visto que podem ser demonstradas estas propriedades por densidade. Para tanto, utilizar-se-á bastante a teoria de sequências regularizantes vista no final do capítulo 3.

Teorema 39 *Existe uma constante* C *(dependente só de* $|I| \leq \infty$*) tal que*

$$||u||_{L^\infty(I)} \leq C||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall\ 1 \leq p \leq \infty \tag{15}$$

Dito de outro modo $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ *com imersão contínua para todo* $1 \leq p \leq \infty$.

Este resultado nos garante todas aquelas regrinhas que tínhamos para derivadas no sentido usual (regra do produto, regra da cadeia) porém com algumas restrições em onde estamos trabalhando.

A fim de chegarmos nos últimos resultados estudados no projeto se fez necessária ainda uma passagem na seguinte definição:

Definição: *Dado* $1 \leq p < \infty$, *denotamos por* $W_0^{1,p}(I)$ *o fecho de* $C_c^1(I)$ *em* $W^{1,p}(I)$

Com isto elabora-se o

Teorema 40 *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$, *então* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *se e somente se* $u = 0$ *sobre* ∂I

E através do mesmo, provamos a importante

(Desigualdade de Poincaré) Suponhamos que I é limitado. Então existe uma constante C (dependendo de $|I|$ tal que)

$$||u||_{W^{1,p}} \leq C||u^{'}||_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

Ou seja, em $W_0^{1,p}(I)$ a quantidade $||u^{'}||_{L^p}$ é uma norma equivalente a norma de $W^{1,p}(I)$

Importante pois ao trabalharmos com o espaço $W_0^{1,p}(I)$, podemos utilzar uma norma bastante simples e conveniente, que é $||u^{'}||_{L^p}$ já que a desigualdade afirma que ambas as normas são equivalentes.

APLICAÇÃO

Com todas estas ferramentas nas mãos, finalmente podemos enunciar um seguinte problema, que facilmente será resolvido utilizando o que foi visto neste relatório.

Consideremos o seguinte problema. Dada uma $f \in C([a,b])$ existe uma função $u(x)$ que verifica

$$\begin{cases} -u^{''} + u = f & em\ \ [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Uma solução clássica do problema (16) é uma função de classe C^2 em $[a,b]$ que verifica (16) no sentido usual. Ignoraremos aqui o fato de (16) poder ser resolvida explicitamente com um cálculo bem simples. Faremos isto com o propósito de ilustrar o método a partir deste exemplo elementar:

Multiplica-se (16) por $\varphi \in C^1[a,b]$ e integra-se por partes; assim temos

$$\int_a^b u^{'}\varphi^{'} + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \qquad (17)$$

observe que (17) tem sentido se $u \in C^1([a,b])$ (contrariamente a (16), que suponhe u derivável duas vezes);de fato, seria suficiente ter $u, u^{'} \in L^1(a,b)$, $u^{'}$ num sentido a determinar. Digamos (provisóriamente) que uma função u de classe C^1 que verifica (17) é uma solução fraca de (16).

O progama seguinte descreve as linhas do enfoque variacional da teoria das equações em derivadas parciais:

1. Precisa-se da noção de solução fraca, isto ocorre com os Espaços de Sobolev, que são a ferramenta básica.

2. Estabelecem-se a existência e a unicidade de uma solução fraca com o método variacional, via o Teorema de Lax-Milgran.

3. Mostra-se que a solução fraca é de classe C^2 (por exemplo); um resultado de regularidade.

4. Recuperação da solução clássica. Mostra-se que toda solução fraca de classe C^2 é solução clássica.

   A etapa (4) é muito simples. De fato, suponhamos que $u \in C^2([a,b]),\ u(a) = u(b) = 0$ e que u verifica (17). Fazendo uma integração por partes em (17) obtemos

$$\int_a^b (-u^{''} + u + f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \ \ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

e assim

$$\int_a^b (-u^{''} + u + f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\ ]a,b[\ )$$

Como $C_c^1(]a,b[)$ é denso em $L^2(a,b)$ (corolário 5), $-u^{''} + u = f \quad q.t.p$ (de fato em todo ponto já que $u \in C^2$).

Referências

[1] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, USA (1978).

[2] Lima, Elon Lages, *Curso de Análise Vol. 1*, Impa, Rio de Janeiro (1976).

[3] Lima, Elon Lages, *Espaços Métricos*, Impa, Rio de Janeiro (1977).

[4] Brezis, Haim, *Analyse Fonctionelle théorie et applications*, MASSON, Paris, França (1983).

[5] S. Kasenave, *Funtional Analysis and Appplications*, Bangalore-India, 1989

[6] Djairo de Figueiredo, *Teoria Clássica do Potencial - Editora Universidade de Brasília*

[7] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second edition, Springer-Verlag, 1983.