

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Relatório Final

INICIAÇÃO AO ESTUDO DOS MÉTODOS CLÁSSICOS EM E.D.P E APLICAÇÕES

Autor: Simeão Targino da Silva

Orientador: Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
Coorientador: Prof. Gilmar Otávio Correia

Sumário

1	Relatorio Final	4
1.1	introdução	4
1.2	Objetivos	5
1.3	Metodologia	5
1.4	Detalhamento do Relatório	5
2	CONDUÇÃO DO CALOR NUMA BARRA	6
2.1	Formulação matemática do problema da condução do calor. . .	6
3	SÉRIES DE FOURIER	9
3.1	Funções periódicas	9
3.2	Cálculo dos coeficientes a_0 , a_n e b_n da Série de Fourier	10
3.3	Funções Seccionalmente Contínua	11
3.4	Funções seccionalmente diferenciáveis	12
3.5	Séries de Fourier de Funções pares e ímpares	12
3.6	Integração de séries de Fourier	14
3.7	Teorema sobre a integração de Séries de Fourier	16
3.8	Estimativas dos Coeficientes de Fourier	16
4	CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER	18
4.1	Classes das funções consideradas	19
4.2	Convergência pontual da série de Fourier	21
4.3	Lema de Riemann-Lebesgue	21
4.4	Identidade de Parseval	21
4.5	Problema Isoperimétrico	22
4.6	Identidade de Parseval	24

5	O GRAU TOPOLÓGICO DE BROUWER	29
5.1	Preliminares	29
5.1.1	Diferenciação	29
5.1.2	Grau Topológico em Dimensão Finita	34
	Referências	45

Capítulo 1

Relatorio Final

1.1 introdução

Este relatório expõe um conjunto de atividades exercidas pelo bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica PIBIC - Milênio entre Agosto de 2003 e Março de 2004. Serão aqui exibidos uma exposição introdutória do projeto: objetivos, metodologia, conteúdo pesquisado e bibliografia utilizada.

Como atividades complementares de grande proveito para o bolsista, ele participou, sendo também palestrante, do encontro de iniciação científica promovido pela UFPB, na oportunidade o aluno teve um resumo publicado nos anais do encontro. Ele também participou de um encontro envolvendo todos os integrantes do grupo que forma o "Projeto de Pesquisa Integrado em Análise", coordenado pelo Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, realizado em fevereiro e agosto de 2003.

O bolsista agradece a sua participação neste importante projeto de iniciação científica, patrocinado pelo PIBIC - Milênio, pois reconhece a importância não só acadêmica, mas cultural (por despertar criatividade e interesse em pesquisa no ramo da Matemática) e social (por integrá-lo em grupos de estudantes e professores criando, assim, um novo ciclo de amizades).

Com o apoio do Instituto Milênio ("Projeto Integrado de Pesquisa em Análise", coordenado pelo Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó), o orientando se beneficia dos estudos em grupo, com colegas, professores e pesquisadores ligados a este projeto de pesquisa. Desta forma, criou-se um ambiente científico bastante dinâmico e motivador.

1.2 Objetivos

Nosso principal objetivo neste projeto é introduzir os conceitos básicos necessários para o estudo de problemas que surgem em diversos ramos da matemática que podem ser solucionados com as técnicas da Análise não linear. Mais precisamente, estudaremos a teoria do grau em dimensão finita e em dimensão infinita e suas aplicações em equações diferenciais parciais elípticas.

Vale salientar também que um projeto desta natureza tem como finalidade introduzir o aluno, ainda em graduação, à pesquisa em Matemática, abrindo, assim, as portas para uma futura pós-graduação.

1.3 Metodologia

- Esse estudo foi desenvolvido na forma de seminários apresentados semanalmente pelos participantes com o acompanhamento dos orientadores.
- Leitura de textos da bibliografia.

1.4 Detalhamento do Relatório

Nos próximos Capítulos, vamos expor os resultados estudados e pesquisados. Iniciaremos nosso estudo com a resolução de algumas equações diferenciais parciais que aparecem em problemas da Física Matemática. Para isso, teremos de desenvolver certos métodos, sendo que o primeiro deles é o Método de Fourier, cujo ingrediente essencial é a série de Fourier. Na segunda parte deste relatório, vamos apresentar os pré-requisitos necessários para o estudo do grau em dimensão finita o qual será desenvolvido subsequente.

Capítulo 2

CONDUÇÃO DO CALOR NUMA BARRA

2.1 Formulação matemática do problema da condução do calor.

O problema da condução do calor consiste em determinar uma função real $U(x, t)$ definida em $R = \{(x, t) : t \geq 0 \text{ e } 0 \leq x \leq L\}$ que satisfaça à equação do calor

$$U_t = kU_{xx}$$

com condição inicial

$$U(x, 0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada

e condição de fronteira

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

Para resolver esse problema, primeiramente usamos o método de separação de variáveis

$$U(x, t) = F(x)G(t)$$

substituindo na equação do calor, temos

$$\frac{1}{k} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{1}{k} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma$$

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0$$

como $U(0, t) = U(L, t) = 0$, temos

$$U(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad \text{e} \quad U(L, t) = F(L)G(t) = 0$$

$$F(0) = F(L) = 0$$

Devemos ver que valores de σ na equação diferencial acima conduzem a soluções $F(x)$ não nulas do problema. Há três possibilidades para σ

i) Se $\sigma > 0$

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

como $F(0) = F(L) = 0$, temos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} &= 0 \end{aligned}$$

o que conduz a $F \equiv 0$

ii) Se $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= c_1 x + c_2 \\ c_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_1 L + c_2 &= 0 \quad , \text{ portanto } F \equiv 0 \end{aligned}$$

iii) Se $\sigma < 0$, fazemos $\sigma = -\lambda^2$, então

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad , \quad \text{logo}$$

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 \sin \lambda L = 0$$

$$\text{Se } c_2 \neq 0 \quad \sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{portanto}$$

$$F(x) = c_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Para a equação

$$G'(t) - \sigma k G(t) = 0 \quad \text{sua solução geral é}$$

$$G(t) = c e^{\sigma k t} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{logo}$$

$$U_n(x, t) = c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\text{Se } F(x) \text{ for da forma } F(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{então}$$

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Portanto, a solução do problema do calor será da forma

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Capítulo 3

SÉRIES DE FOURIER

3.1 Funções periódicas

Definição: Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo x .

Se T é um período para a função f , então $2T$ também é um período, pois $f(x + 2T) = f(x + T) = f(x)$. E, em geral, kT também é um período de f , onde $k \in \mathbb{Z}$. O menor período positivo de uma função é chamado de período fundamental, ou simplesmente período.

O período T da função $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ pode ser determinado do seguinte modo.

como $f(x + T) = f(x)$, temos ,

$$\sin \frac{n\pi(x+T)}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L} \right) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{n\pi T}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

para $x = \frac{L}{2n}$, temos

$$\sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi T}{L} = \sin \frac{\pi}{2}$$

como $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, logo $\cos \frac{n\pi T}{L} = 1$ e $\sin \frac{n\pi T}{L} = 0$

Portanto $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2L}{n}$

Uma função $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, pode ser escrita como uma série de senos e (ou) cossenos da forma:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

com os coeficientes a_n , a_n e b_n escolhidos adequadamente.

Para calcular os coeficientes, vamos supor que a série convirja uniformemente, pois as séries que convergem uniformemente apresentam as seguintes propriedades.

Proposição 3.1.1 Suponhamos que as funções U_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ convirja uniformemente. Então a soma da série $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ é também uma função contínua.

Proposição 3.1.2 Suponhamos que as funções U_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ convirja uniformemente. Então $\int_I (\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I U_n(x) dx$

Proposição 3.1.3 Suponhamos que as funções $U_n(x)$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0)$ convirja. Então $\frac{d}{dx} (\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$

3.2 Cálculo dos coeficientes a_0 , a_n e b_n da Série de Fourier

Vamos supor que a série convirja uniformemente; logo pela primeira propriedade acima, a função f deve ser contínua (portanto, pode ser integrada) e deve ser periódica de período $2L$, pois o período de $\cos \frac{\pi x}{L}$ e $\sin \frac{\pi x}{L}$ é $2L$. Assim, pela segunda propriedade acima, podemos integrar ambos os lados da série, obtendo

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx)$$

como $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ temos $\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx$

Portanto $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$

Para obter os demais coeficientes, exploramos a mesma idéia e usamos as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = L, \text{ se } n = m \geq 1$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n \neq m; n, m \geq 1$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = L, \text{ se } n = m \geq 1$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n \neq m; n, m \geq 1$$

Multiplicando a Série de Fourier por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integrando, obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L \text{ analogamente, obtemos}$$

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L$$

Portanto, os coeficientes de fourier da função f são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n \geq 1$$

3.3 Funções Seccionalmente Contínua

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela for contínua ou tiver um número finito de descontinuidade (todas de primeira espécie) em

qualquer intervalo limitado.

Um exemplo de função que não é seccionalmente contínua é a função $f(x) = \frac{1}{x}$, pois possui descontinuidade de segunda espécie em $x = 0$

3.4 Funções seccionalmente diferenciáveis

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se sua derivada f' for também seccionalmente contínua.

TEOREMA DE FOURIER. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

O teorema acima significa que, a série converge para os valores da função f , nos pontos onde f é contínua, e, nos pontos onde f é descontínua ela converge para a média dos limites laterais.

3.5 Séries de Fourier de Funções pares e ímpares

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$. O gráfico de uma função par é simétrico com relação ao eixo y .

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpa se $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$. O gráfico de uma função ímpa é simétrico com relação a origem.

Proposição 3.5.1

i) A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções

ímpares é ímpar.

Demonstração

f e g são funções pares

$$[f + g](x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = [f + g](-x)$$

f e g são funções ímpares

$$[f + g](x) = f(x) + g(x) = [-f(-x)] + [-g(-x)] = -[f(-x) + g(-x)] = -[f + g](-x)$$

ii) O produto de duas funções pares é uma função par.

Demonstração

f e g são funções pares

$$[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x) = [f \cdot g](-x)$$

iii) O produto de duas funções ímpares é uma função par.

Demonstração

f e g são funções ímpares

$$[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x) = [-f(-x)] \cdot [-g(-x)] = f(-x) \cdot g(-x) = [f \cdot g](-x)$$

iv) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Demonstração

f é uma função par e g é uma função ímpar

$$[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot [-g(-x)] = -[f(-x) \cdot g(-x)] = -[f \cdot g](-x)$$

Proposição 3.5.2

i) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f$$

ii) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-L}^L f = 0$$

3.6 Integração de séries de Fourier

Nesta seção mostraremos que a série de Fourier pode ser integrada termo a termo, e o valor dessa integral é igual a integral da função f que corresponde a série.

Suponha que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja igual a sua série de Fourier, logo podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

Usando a proposição 2.2, temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} (\int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L}dx + \int_a^b b_n \sin \frac{n\pi x}{L}dx)$$

Seja a função contínua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela expressão abaixo, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt$$

Pelo teorema fundamental do cálculo $F'(x) = f(x)$, logo $F'(x)$ é seccionalmente contínua. A função $F(x)$ é periódica de período $2L$, pois $F(x + 2L) = F(x)$

Demonstração

$$\begin{aligned} F(x + 2L) - F(x) &= 0 \Rightarrow \int_0^{x+2L} [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt - \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt = \\ &= \int_0^{x+2L} [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt + \int_x^0 [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt = \int_x^{x+2L} [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt = \int_{-L}^L [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a função $F(x)$ que é periódica de período $2L$, pode ser escrita na forma

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

com

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \text{ e } B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Para obter relações entre os coeficientes de F e f , usamos integração por partes nas expressões de A_n e B_n acima e obtemos

$$A_n = \frac{1}{L} [F(x) \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L}]_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx]$$

$$A_n = \frac{1}{L} (-\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx) \Rightarrow A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n \text{ com } n \geq 1$$

$$B_n = \frac{1}{L} [-F(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L}]_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx]$$

$$B_n = \frac{1}{L} (\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx) \Rightarrow B_n = \frac{L}{n\pi} a_n \text{ com } n \geq 1$$

Para calcular o A_0 , fazemos $x = 0$ na série de Fourier de $F(x)$ e obtemos

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A_0 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

como

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt \quad \text{e} \quad F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

temos

$$\int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L b_n}{\pi n} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-L}{n\pi} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi} a_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{L a_n}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{L} - \frac{L b_n}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L b_n}{\pi n})$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^x a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^x b_n \sin \frac{n\pi t}{L} dt)$$

fazendo-se $x = a$ e $x = b$ e subtraindo-se as expressões obtidas chegamos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)$$

Portanto, podemos resumir esta seção no seguinte resultado

3.7 Teorema sobre a integração de Séries de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua, cuja série de Fourier é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Podemos chegar, então, a duas conclusões

i) Esta série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é igual a integral de f , ou seja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_a^b \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)$$

ii) A função $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt$ é periódica de período $2L$, contínua, tem derivada F' seccionalmente contínua e pode ser escrita como uma série de Fourier, ou seja

$$\int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

3.8 Estimativas dos Coeficientes de Fourier

Vejamos como obter certas estimativas dos coeficientes de Fourier de uma certa função f , periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável como

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Usando o fato de que

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{e} \quad \cos \frac{n\pi x}{L} \leq 1$$

obtemos

$$|a_n| = |\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|dx$$

$$|b_n| = |\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|dx$$

logo existe uma constante $M = L^{-1} \int_{-L}^L |f(x)|dx$, tal que $|a_n| \leq M$ e $|b_n| \leq M$, para todo n .

Capítulo 4

CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

No capítulo anterior, mostramos que, se a série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

converge e, assim, define uma função f , então f é periódica com período $2L$ e os coeficientes a_n e b_n estão relacionados a $f(x)$ pelas seguintes fórmulas

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Dada uma função f periódica de período $2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$, então pode-se calcular um conjunto de coeficientes a_n e b_n , e pode-se construir, formalmente, uma série de Fourier para f . O problema é saber se essa série converge para algum valor de x e, se for esse o caso, se sua soma é $f(x)$. Foram descobertos exemplos que mostram que uma série de Fourier correspondente a uma função f pode não convergir para $f(x)$ ou pode até divergir.

Para garantir a convergência de uma série de Fourier para a função da qual seus coeficientes são calculados, é essencial colocar hipóteses adicionais sobre a função.

4.1 Classes das funções consideradas

Para definirmos os coeficientes de Fourier de uma função f , as hipóteses mínimas a fazer sobre ela são periodicidade, integrabilidade e integrabilidade absoluta no intervalo $[-L, L]$.

Nesta seção concluímos, que há funções integráveis f tais que $|f|$ não é integrável, bem como há funções não-integráveis f tais que $|f|$ é integrável. Usaremos a notação: $l^1 \Leftrightarrow f$ e $|f|$ são integráveis.

Portanto se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função l^1 , então os coeficientes de Fourier de f estarão bem definidos.

TEOREMA 4.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função l^1 . Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\int_a^b |f(x) - \Psi(x)| dx < \epsilon \quad \text{e} \quad \Psi(a) = \Psi(b) = 0$$

Demonstração:

i) Suponha que f seja limitada e integrável

dado $\epsilon > 0$, existe uma partição

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

tal que

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2}$$

com $m_j = \inf \{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$

considere a função $\chi(x) = m_j$, para $x_{j-1} \leq x \leq x_j$

Portanto, a expressão acima pode ser escrito assim

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \chi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)] dx < \frac{\epsilon}{2}$$

Agora, considere a função Ψ_n , cujo gráfico é obtido substituindo o gráfico de χ [que são retângulos] por trapézios, cujos lados inclinados têm inclinação n , logo

$$\int_a^b |\chi(x) - \Psi_n(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\tan n} \quad \text{e} \quad \Psi_n(a) = \Psi_n(b) = 0$$

tome um $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$,

então

$$\int_a^b |\chi(x) - \Psi_n(x)| dx \leq \frac{KM^2}{\tan n}$$

Portanto, $\exists n$ tal que

$$\int_a^b |\chi(x) - \Psi_n(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}$$

e conseqüentemente

$$\int_a^b |f(x) - \Psi(x)| dx < \epsilon \quad \text{onde} \quad \Psi(x) = \Psi_n(x)$$

ii) Suponha que f seja não-limitada, mas integrável e absolutamente integrável.

Para f não-limitada apenas nas vizinhanças de a e b , temos que, f é limitada no intervalo $[a + \delta, b - \delta]$ para um dado $\delta > 0$.

Agora é só definir a função Ψ como sendo igual a zero no intervalo $[a, a + \delta] \cup [b - \delta, b]$ e logo temos

$$\int_a^b |f(x) - \Psi(x)| dx < \epsilon$$

O teorema 3.1 quer dizer que, dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uma função l^1 , existe uma sucessão de funções contínuas $\Psi_n(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\Psi_n(a) = \Psi_n(b) = 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \Psi_n(x)| dx = 0$$

4.2 Convergência pontual da série de Fourier

Nesta seção foram estudadas as condições sobre a função f que garantam a convergência da série de Fourier num ponto fixado x para o valor $f(x)$. Para isso foram feitas hipóteses sobre o comportamento de f nas vizinhanças do ponto x . Foram calculadas estimativas para o valor

$$e_n(x) = S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

onde

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L})$$

e vimos que $e_n(x) \rightarrow 0$, ou seja, $S_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ quando $n \rightarrow \infty$

Portanto, isso estabelece a validade do teorema de Fourier.

4.3 Lema de Riemann-Lebesgue

Nesta seção foi demonstrado o seguinte lema

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função l^1 em um intervalo $[a, b]$.
Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0$$

4.4 Identidade de Parseval

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de quadrado integrável se f e $|f|^2$ forem integráveis. Usaremos a nomenclatura função l^2 para designar tal função

Uma sucessão f_n de funções de quadrado integráveis, em um intervalo $[a, b]$, converge, em média quadrática, para uma função f de quadrado integrável, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

Designemos e_n como sendo

$$e_n = \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx$$

Como as reduzidas $S_n(x)$ da série de Fourier de uma função f de quadrado integrável converge, em média quadrática, para f , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

Para calcularmos e_n , usamos as relações de ortogonalidade e as expressões dos coeficientes de Fourier, e obtemos

$$e_n = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

como $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$, logo

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0 \quad \text{e portanto}$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

essa relação, que é conhecida como identidade de Parseval, será usada na próxima seção para provar a desigualdade isoperimétrica.

4.5 Problema Isoperimétrico

TEOREMA (A desigualdade isoperimétrica). A área A englobada por qualquer curva simples plana fechada retificável C , de comprimento L , satisfaz à desigualdade

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

além disso, a igualdade ocorre, se e só se, C for um círculo.

Def.1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidade (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado.

Def.2 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

Dada uma curva fechada, simples e seccionalmente diferenciável C , de comprimento L , com parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, seu comprimento e sua área são dados por

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad \text{e} \quad A = \int_a^b x(t)y'(t)dt$$

O parâmetro s , comprimento de arco, é definido por

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau \quad t \in [a, b]$$

Como $s : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é bijetiva e diferenciável, podemos parametrizar a curva C pelo comprimento de arco, obtendo

$$\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \quad , \quad s \in [0, L]$$

onde $\tilde{x}(s) = x(t(s))$ e $\tilde{y}(s) = y(t(s))$ ou $x(t) = \tilde{x}(s(t))$ e $y(t) = \tilde{y}(s(t))$

$$x'(t) = \tilde{x}'(s(t))s'(t) \Rightarrow \tilde{x}'(s(t))^2 = \frac{x'(t)^2}{s'(t)^2}$$

$$y'(t) = \tilde{y}'(s(t))s'(t) \Rightarrow \tilde{y}'(s(t))^2 = \frac{y'(t)^2}{s'(t)^2}$$

como $s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau$, então

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \Rightarrow s'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2, \text{ e conseqüentemente}$$

$$\tilde{x}'(s(t))^2 + \tilde{y}'(s(t))^2 = \frac{x'(t)^2}{s'(t)^2} + \frac{y'(t)^2}{s'(t)^2} = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{s'(t)^2} = 1$$

Portanto

$$\tilde{x}'(s(t))^2 + \tilde{y}'(s(t))^2 = 1, \quad s \in [0, L]$$

TEOREMA FOURIER Suponha que f e f' sejam seccionalmente contínuas no intervalo $-l \leq x < l$. Suponha, além disso, que f está definida fora do intervalo $-l \leq x < l$ de modo a ser periódica com período $2l$. Então f tem uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

cujos coeficientes são dados pelas equações abaixo. A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua e converge para $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ em todos os pontos onde f é descontínua.

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4.6 Identidade de Parseval

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2l$, onde f , $|f|$ e $|f|^2$ são integráveis, seus coeficientes de Fourier a_n e b_n estão relacionados por

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx$$

Se f e g são periódicas de período $2l$ e seccionalmente contínuas, então, usando a identidade de Parseval para a função $f(x) + g(x)$, pode-se mostrar que

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)g(x)dx$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f e α_n e β_n os de g .

Demonstração do teorema (desigualdade isoperimétrica)

Para uma curva C seccionalmente diferenciável, podemos obter uma parametrização usando o comprimento de arco.

$$\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) , \quad s \in [0, L]$$

$$\text{Para } t = \frac{s}{L} , \text{ temos } \alpha(t) = (x(t), y(t)) , \quad t \in [0, 1]$$

$$\text{onde } x(t) = \tilde{x}(tL) \text{ e } y(t) = \tilde{y}(tL) , \text{ logo}$$

$$x'(t) = \tilde{x}'(tL).L \Rightarrow x'(t) = \tilde{x}'(s).L$$

$$y'(t) = \tilde{y}'(tL).L \Rightarrow y'(t) = \tilde{y}'(s).L$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \tilde{x}'(s)^2.L^2 + \tilde{y}'(s)^2.L^2 \Rightarrow x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2[\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2]$$

$$\text{Portanto } x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2$$

Como as funções $x(t)$ e $y(t)$ são periódicas de período 1 e seccionalmente diferenciáveis, usando o teorema de Fourier, podemos escrever as suas séries

$$\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t) \\
y(t) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos 2n\pi t + \beta_n \sin 2n\pi t) \quad \text{derivando} \\
x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2n\pi a_n \sin 2n\pi t + 2n\pi b_n \cos 2n\pi t) \\
y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2n\pi \alpha_n \sin 2n\pi t + 2n\pi \beta_n \cos 2n\pi t)
\end{aligned}$$

Usando a identidade de Parseval nas expressões de $x'(t)$ e $y'(t)$ acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} [(-2n\pi a_n)^2 + (2n\pi b_n)^2] &= \frac{1}{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |x'(t)|^2 dt \\
\sum_{n=1}^{\infty} [(-2n\pi \alpha_n)^2 + (2n\pi \beta_n)^2] &= \frac{1}{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |y'(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2) &= 2 \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \\
\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) &= 2 \int_0^1 |y'(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

somando membro a membro as expressões acima ,obtemos

$$\int_0^1 |x'(t)|^2 dt + \int_0^1 |y'(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

como $x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2$, então, integrando e substituindo o membro direito pela expressão do somatório acima , temos

$$\int_0^1 |x'(t)|^2 dt + \int_0^1 |y'(t)|^2 dt = \int_0^1 L^2 dt \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2) = L^2$$

usando novamente a identidade de Parseval para as duas séries de $x(t)$ e $y'(t)$ chegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n 2n\pi\beta_n + b_n (-2n\pi\alpha_n)] = 2 \int_0^1 x(t)y'(t)dt \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\pi(a_n\beta_n - b_n\alpha_n) = \int_0^1 x(t)y'(t)dt = A$$

Portanto

$$L^2 - 4\pi A = \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2) - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(a_n\beta_n - b_n\alpha_n) \Rightarrow$$

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 \alpha_n^2 + n^2 \beta_n^2 + 2nb_n\alpha_n - 2na_n\beta_n) \Rightarrow$$

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - \beta_n)^2 + (nb_n + \alpha_n)^2 + (n^2 - 1)(\alpha_n^2 + \beta_n^2)]$$

que implica na desigualdade isoperimétrica procurada

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

a igualdade ocorrerá se $a_1 = \beta_1$, $b_1 = -\alpha_1$ e $a_n = b_n = \alpha_n = \beta_n = 0$ para $n > 1$, conseqüentemente

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos 2\pi t - \alpha_1 \sin 2\pi t$$

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos 2\pi t + a_1 \sin 2\pi t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

é a representação paramétrica de um círculo.

Capítulo 5

O GRAU TOPOLÓGICO DE BROUWER

Neste capítulo estamos interessados em construir uma ferramenta, o grau topológico $d(f, \Omega, y)$ de f com respeito a Ω e a y , que seja útil na investigação de equações da forma $f(x) = y$, onde f é uma função contínua definida em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^n$ e y é um ponto dado em $\mathbb{R}^n$.

A cada tripla (f, Ω, y) vamos associar um número inteiro $d(f, \Omega, y)$ tal que as propriedades da função d nos permitam encontrar respostas significativas quanto à existência, unicidade ou multiplicidade de soluções da equação $f(x) = y$.

5.1 Preliminares

Iniciaremos, este capítulo introduzindo alguns conceitos preliminares de análise no $\mathbb{R}^n$ que são necessários para o estudo do grau topológico.

5.1.1 Diferenciação

Definição: Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}^n$, se existe uma transformação linear $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

Teorema 5.1 Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}^n$, existe uma única transformação linear $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

Teorema 5.2 (Regra da Cadeia) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em a , e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $f(a)$, então a composição $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em a , e

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Derivadas Parciais.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a^1, \dots, a^i + h, \dots, a^n) - f(a^1, \dots, a^n)}{h},$$

se existe, é denotado por $D_i f(a)$, e chamado a i -ésima derivada parcial de f em a .

Teorema 5.3 Se $D_{i,j}f$ e $D_{j,i}f$ são contínuas em um conjunto aberto contendo a , então

$$D_{i,j}f(a) = D_{j,i}f(a).$$

A função $D_{i,j}$ é chamada derivada parcial mista de segunda ordem de f .

Teorema 5.4 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Se o máximo (ou mínimo) de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ocorre em um ponto a no interior de A e $D_i f(a)$ existe, então $D_i f(a) = 0$.

Dem.: Seja $g_i(x) = f(a^1, \dots, x, \dots, a^n)$. Evidentemente g_i tem um máximo (ou mínimo) em a^i , e g_i é definida em um intervalo aberto contendo a^i . Portanto, $0 = g'_i(a^i) = D_i f(a)$. O que prova o Teorema.

Observação: A recíproca não é verdadeira.

Derivadas.

Teorema 5.5 Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em a , então $D_j f^i(a)$ existe para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $f'(a)$ é a matriz $(D_j f^i(a))_{m \times n}$.

Teorema 5.6 *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, então $Df(a)$ existe se todas as $D_j f^i(x)$ existem em um conjunto aberto contendo a , e se cada função $D_j f^i$ é contínua em a .*

Tal função f é chamada continuamente diferenciável em a .

Teorema 5.7 *Sejam $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis em a , e seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(g_1(a), \dots, g_m(a))$. Definindo a função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = f(g_1(x), \dots, g_m(x))$, então*

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^m D_j f(g_1(a), \dots, g_m(a)) \cdot D_i g_j(a).$$

Nos próximos dois tópicos, serão expostos, sem demonstração, resultados que acompanham um matemático em toda sua jornada.

Funções Inversas

Lema 5.1.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo e seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável. Se existe um número M tal que $|D_j f^i(x)| \leq M$ para todo x no interior de A , então*

$$|f(x) - f(y)| \leq n^2 M |x - y|$$

para todo $x, y \in A$.

Teorema 5.8 (Teorema da Função Inversa) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo a , e $\det f'(a) \neq 0$. Então existe um conjunto aberto V contendo a e um conjunto aberto W contendo $f(a)$ tal que $f : V \rightarrow W$ tem uma função inversa contínua $f^{-1} : W \rightarrow V$ que é diferenciável, e para todo $y \in W$ satisfaz*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Teorema da Função Implícita

Teorema 5.9 *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo (a, b) e $f(a, b) = 0$. Considere M a matriz de ordem m definida por*

$$(D_{n+j} f^i(a, b)) \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Se $\det M \neq 0$, existe um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ contendo a e um conjunto $B \subset \mathbb{R}^m$ contendo b , com a seguinte propriedade: para cada $x \in A$ existe um único $g(x) \in B$ tal que $f(x, g(x)) = 0$. A função g é diferenciável.

O próximo resultado é uma generalização da idéia deste teorema.

Teorema 5.10 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo a , onde $p \leq n$. Se $f(a) = 0$ e a matriz $(D_j f^i(a))$ tem posto p , então existe um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ contendo a e uma função diferenciável $h : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ com uma inversa diferenciável tal que*

$$f \circ h(x^1, \dots, x^n) = (x^{n-p+1}, \dots, x^n).$$

Teorema 5.11 (TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS). *Sejam $h : U \rightarrow V$ difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J -mensurável e $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $f \circ h$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y) dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)| dx.$$

Teorema de Fubini

A redução de uma integral sobre um bloco m -dimensional (integral múltipla) a uma seqüência de m integrais de funções de uma variável (integral repetida) é um eficaz instrumento de cálculo. Para tal, utiliza-se o teorema abaixo:

Teorema 5.12 (Teorema de Fubini) *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ retângulos fechados e $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Para $x \in A$ seja $g_x : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_x(y) = f(x, y)$ e considere*

$$\varphi(x) = s \int_B g_x = s \int_B f(x, y) dy,$$

$$\psi(x) = S \int_B g_x = S \int_B f(x, y) dy.$$

Então φ e ψ são integráveis em A e

$$\int_{A \times B} f = \int_A \varphi = \int_A \left(s \int_B f(x, y) dy \right) dx,$$

$$\int_{A \times B} f = \int_A \psi = \int_A \left(S \int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

O próximo teorema é de fundamental importância na construção do Grau Topológico.

Lema 5.1.2 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo e $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável. Se existe M tal que $|D_j g^i(x)| \leq M$ para todo x no interior de A , então*

$$|g(x) - g(y)| \leq n^2 M |x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

Teorema 5.13 (Teorema de Sard) *Seja $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, e seja $B = \{x \in A; \det g'(x) = 0\}$. Então $g(B)$ tem medida 0.*

Dem.: Considere $U \subset A$ sendo um retângulo fechado, tal que todos os lados têm comprimento l . Se N é suficiente grande e U é dividido em N^n retângulos com lados l/N . Seja S cada retângulo de lado l/N , se $x \in S$ e sendo g diferenciável, tem-se

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)|}{|y - x|} = 0,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < |y - x| < \delta &\Rightarrow \frac{|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)|}{|y - x|} < \epsilon \\ &\Rightarrow |g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)| < \epsilon |y - x|. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |y - x| &\leq \sqrt{n} \, l/N \\ \epsilon |y - x| &\leq \epsilon \sqrt{n} \, l/N. \end{aligned}$$

Daí $|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)| < \epsilon |y - x| \leq \epsilon \sqrt{n} (l/N) \forall y \in S$. Se S intercepta B pode-se escolher $x \in S \cap B$; como $\det g'(x) = 0$, o conjunto $\{Dg(x)(y - x); y \in S\}$ está contido num subespaço V de dimensão $(n - 1)$. Portanto $\{g(y) - g(x); y \in S\}$ está a uma distância $\epsilon \sqrt{n} (l/N)$ de V , de modo que $\{g(y); y \in S\}$ está a uma distância $\epsilon \sqrt{n} (l/N)$ do plano $V + g(x)$.

Por outro lado, pelo Lema 5.1.2, existe M tal que

$$|g(x) - g(y)| < M |x - y| \leq M \sqrt{n} (l/N).$$

Assim, se S intercepta B , $\{g(y); y \in S\}$ está contido em um cilindro cuja altura é menor que $2\epsilon \sqrt{n} (l/N)$ e cuja base é uma esfera (de dimensão

$(n - 1)$) de raio menor que $M\sqrt{n}(l/N)$. Este cilindro tem volume menor que $C(l/N)^n \epsilon$ para alguma constante C . Há, no máximo, N^n retângulos semelhantes a S , portanto $g(U \cap B)$ encontra-se em um conjunto de volume menor que $C(l/N)^n \cdot \epsilon \cdot N^n = Cl^n \cdot \epsilon$. Desde que isto é verdadeiro para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $g(U \cap B)$ tem medida zero. Como A pode ser coberto por uma seqüência de retângulos semelhantes a U , pelo Teorema ??, $g(B)$ tem medida nula.

5.1.2 Grau Topológico em Dimensão Finita

O Grau Topológico $d(f, \Omega, y)$ é uma ferramenta que nos dá informações quanto a existência de soluções de equações da forma $f(x) = y$, onde f é uma função contínua definida em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^n$ e y é um ponto dado em $\mathbb{R}^n$.

Nestas notas serão trabalhadas sua unicidade, construção e, também, algumas aplicações, partindo-se do fato de que tal função exista com as seguintes propriedades: (a) Assume valor 1 quando $f = id$; (b) Traz informações sobre a localização das soluções de f ; e (c) É invariante por homotopia.

Unicidade do Grau

Nesta seção serão apresentados os passos que mostram a existência de uma única função $d : \{(f, \Omega, y)\} \rightarrow \mathbb{Z}$ sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, satisfazendo:

- (d1) $d(id, \Omega, y) = 1$ para $y \in \Omega$.
- (d2) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ onde Ω_1, Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de Ω tais que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.
- (d3) $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ é independente de $t \in J = [0, 1]$ onde $h : J \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$.

Isso será feito por reduções a situações mais simples. Inicialmente mostra-se que o grau é unicamente determinado para valores de funções $\overline{C}^\infty$.

De $C(\overline{\Omega})$ para $\overline{C}^\infty(\Omega)$.

As duas proposições que seguem são imprescindíveis para o restante do trabalho.

Proposição 5.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Então*

$\tilde{f}$ pode ser estendida continuamente para o $\mathbb{R}^n$, isto é, existe uma contínua $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Proposição 5.2 (a) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f \in C(A)$ e $\epsilon > 0$. Então existe uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon$ em A .

(b) Dado $f \in \overline{C}^1$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $\Omega_\delta = \{x \in \Omega; \varrho(x, \partial\Omega) \geq \delta\} \neq \emptyset$, existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f - g|_0 + \max_{\Omega_\delta} |f'(x) - g'(x)| \leq \epsilon$

Concluindo essa primeira etapa, tem-se:

Proposição 5.3 Sejam $f \in C(\overline{\Omega})$, $y \notin f(\partial\Omega)$ e $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Então existe $g \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ tal que $|f - g|_0 < \alpha$, e

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$$

De valores regulares para valores singulares.

Este é um dos resultados fundamentais na unicidade do Grau, e também muito útil para sua construção.

Proposição 5.4 Sejam $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Se y é um valor regular de f , então $f(x) = y$ tem um número finito de soluções.

Dem.: Como y é um valor regular de f , $J_f(x_0) \neq 0$ e o Teorema 5.8 nos garante a existência de $U = B_\epsilon(x_0)$ tal que $f|_U$ é um homeomorfismo, e portanto, uma bijeção. Daí segue que, para $x_o \in f^{-1}(y)$, podemos tomar $U = B_\epsilon(x_0)$ tal que $f^{-1}(y) \cap B_\epsilon(x_0) = \{x_o\}$. Concluimos, portanto, que os elementos de $f^{-1}(y)$ são pontos isolados. Consequentemente, $f^{-1}(y)$ deve ser finito.

Suponha que $f^{-1}(y)$ seja infinito. Então existe ponto de acumulação pertencente a $\overline{\Omega}$. Pela compacidade de $\overline{\Omega}$ e a continuidade da f , mostra-se que um dado $x_0 \in f^{-1}(y)$ pertence a Ω e é ponto de acumulação, que não é isolado, o que é um absurdo.

Proposição 5.5 Sejam $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ tais que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Então existe $\alpha > 0$ tal que $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0)$ para todo $y \in B_\alpha(y_0)$.

Dem.: Seja $\alpha = \varrho(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$, então $B_\alpha(y_0) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Defina $h(t, x) = f(x)$ e $y(t) = ty_0 + (1 - t)y$ com $y \in B_\alpha(y_0)$, $t \in [0, 1]$. Temos que $h(t, x)$ e $y(t)$ cumprem as condições de **(d3)**. Assim, concluimos que $d(h(t, x), \Omega, y(t))$ independe de $t \in [0, 1]$. Portanto

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0) \quad \forall y \in B_\alpha(y_0).$$

Esta proposição e o Teorema 5.13 permitem concluir que para calcular o $d(f, \Omega, y)$ basta considerar y valor regular de f .

De $\overline{C}^\infty$ para Transformações Lineares.

Esta é a última etapa na redução do problema da unicidade do Grau.

Resultados decorrentes de **(d2)**:

Lema 5.1.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \notin f(\partial\Omega)$, então:*

- (a) $d(f, \emptyset, y) = 0$;
- (b) *Se Ω_1 é um subconjunto aberto de Ω e $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ então $d(f, \Omega_1, y) = d(f, \Omega, y)$;*
- (c) *Se $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$, $y \notin f(S_f(\Omega))$ e $f^{-1}(y) = \emptyset$, então $d(f, \Omega, y) = 0$.*

Finalizando essa última etapa, será enunciado um dos principais resultados desta seção; fazendo uso do mesmo, juntamente com a Proposição 5.7, conclui-se a unicidade do Grau.

Proposição 5.6 *Sejam $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega \cup S_f(\Omega))$ e $f^{-1}(y) = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$. Então existe $r > 0$ tal que*

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m d(f'(x^i), B_r(0), 0).$$

O Caso Linear

Proposição 5.7 *Seja A uma matriz $n \times n$ real com $\det A \neq 0$, sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores negativos de A e $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ suas multiplicidades como zeros de $\det(A - \lambda id)$, assumindo que A tenha tais autovalores. Então $\mathbb{R}^n$ é a soma direta de dois subespaços N e M , $\mathbb{R}^n = N \oplus M$, tais que:*

- (a) M e N são invariantes por A ;
- (b) $A|_N$ tem somente os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ e $A|_M$ não tem autovalores negativos;
- (c) $\dim N = \sum_{k=1}^m \alpha_k$.

Teorema 5.14 (Unicidade do Grau) *Seja*

$$M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \in \mathbb{R}^n \text{ aberto e limitado, } f \in C(\overline{\Omega}) \text{ e } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}.$$

Então existe no máximo uma função $d : M \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfazendo as propriedades (d1)–(d3). Além do mais, tais propriedades implicam que $d(A, \Omega, 0) = \text{sgn } \det A$ para aplicações lineares A com $\det A \neq 0$ e $0 \in \Omega$.

Construção do Grau

Nesta seção, o Grau será definido em três etapas.

Definição do grau restrita a valores regulares de $f \in \overline{C}^1(\Omega)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f)$. Então:

$$d(f, \Omega, y) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn} J_f(x), & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

A fim de generalizar a definição do Grau para além de valores regulares, substitui-se $\sum \text{sgn} J_f(x)$ por uma integral apropriada, tendo em vista que ela não enxerga conjuntos de medida nula.

Proposição 5.8 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f)$, e $(\varphi_\epsilon)\epsilon > 0$ a família de funções regularizantes dada por*

$$\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \varphi_1\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

onde $\varphi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\frac{-1}{1 - |x|^2}\right), & \text{para } |x| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(y, f)$ tal que

$$d(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} \varphi_\epsilon(f(x) - y) J_f(x) dx, \quad \text{para } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0.$$

De valores regulares para valores singulares

Uma vez definido o Grau para valores regulares, a definição será modificada de modo a abranger também os valores singulares.

Proposição 5.9 *Considere $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ e $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Seja $\alpha = \varrho(y_0, f(\partial\Omega))$ e suponha que $y^1, y^2 \in B_\alpha(y_0)$ são dois valores regulares de f . Então*

$$d(f, \Omega, y^1) = d(f, \Omega, y^2).$$

Daí, tem-se a seguinte definição:

Definição do grau para qualquer valor de $f \in \overline{C}^2(\Omega)$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Definimos $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y^1)$, onde y^1 é um valor regular de f tal que $|y^1 - y| < \varrho(y, f(\partial\Omega))$ e $d(f, \Omega, y^1)$ é dado pela definição anterior.

A definição do Grau ser ampliada a sua forma mais genérica, ou seja, para $f \in C(\overline{\Omega})$.

Definição do grau para $f \in C(\overline{\Omega})$.

Sejam $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Então definimos $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$, em que $g \in \overline{C}^2(\Omega)$ é uma função tal que $|g - f|_0 < \varrho(y, f(\partial\Omega))$ e $d(g, \Omega, y)$ é dado pela definição anterior.

O Grau assim definido, apresenta as propriedades a seguir:

Propriedades do Grau

Proposição 5.10 *Sejam $M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto e limitado, } f \in C(\overline{\Omega}) \text{ e } y \notin f(\partial\Omega)\}$ e $d : M \rightarrow \mathbb{Z}$ o grau topológico. Então d satisfaz:*

- (d1) $d(\text{id}, \Omega, y) = 1$ para $y \in \Omega$;
- (d2) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ quando Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de Ω tais que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$;
- (d3) $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ independe de $t \in J = [0, 1]$ sempre que $h : J \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ forem contínuas e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$;
- (d4) $d(f, \Omega, y) \neq 0$ implica $f^{-1}(y) \neq \emptyset$;
- (d5) $d(\cdot, \Omega, y)$ e $d(f, \Omega, \cdot)$ são constantes em $\{g \in C(\overline{\Omega}); |g - f|_0 < r\}$ e $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente, onde $r = \varrho(y, f(\partial\Omega))$. Além disso, $d(f, \Omega, \cdot)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$;
- (d6) $d(g, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$ sempre que $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$;
- (d7) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y)$ para todo subconjunto aberto Ω_1 de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$.

Dem.: Pelo Teorema 5.14 as três primeiras propriedades são verdadeiras, daí mostraremos as restantes.

(d4) J sabemos que $f^{-1}(y) = \emptyset$ implica que $d(f, \Omega, y) = 0$. Então, se $d(f, \Omega, y) \neq 0$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

(d5) As duas primeiras partes vêm da definição do Grau. Daremos a prova da última. Desde que $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ é aberto, suas componentes conexas são abertos de $\mathbb{R}^n$, sendo portanto conexas por caminhos. Daí se $\mathcal{K}$ é uma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ e $y^1, y^2 \in \mathcal{K}$, existe uma curva contínua $y : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}$ com $y(0) = y^1$ e $y(1) = y^2$; portanto, por (d3), temos $d(f, \Omega, y^1) = d(f, \Omega, y^2)$.

(d6) Seja $h(t, x) = tf(x) + (1 - t)g(x)$, $t \in [0, 1]$, que é contínua. Basta verificar que $y \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$. Para tanto, seja $x \in \partial\Omega$, então

$$\begin{aligned} h(t, x) &= tf(x) + (1 - t)g(x) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(x) \\ &= f(x) \neq y \end{aligned}$$

(d7) Vê-se facilmente que resulta de (d2).

Pode-se perceber que (d4)-(d7) são conseqüências de (d1)-(d3).

Aplicações do Grau

Ponto Fixo de Brouwer

Teoremas que asseguram a existência de um ponto fixo para certos tipos de aplicações são sempre interessantes pois, em princípio, a busca de uma solução x para uma equação do tipo $f(x) = y$ reduz-se á procura de um ponto fixo para a aplicação $\mathcal{F}$, definida por $\mathcal{F}(x) = f(x) + x - y$. Com efeito, $\mathcal{F}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Lema 5.1.4 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer e B o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de D , isto é,*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i : x^i \in D; \lambda_i \in [0, 1] \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Então $B = \text{conv}D$

Teorema 5.15 (Brouwer) *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto convexo não-vazio e $f : D \rightarrow D$ uma função contínua. Então f tem um ponto fixo.*

Dem.: Parte 1. Suponha que $D = \overline{B}_r(0)$ e que f não possui pontos fixos na fronteira de D . Defina $h : [0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $h(t, x) = x - tf(x)$.

Mostremos que $0 \notin h([0, 1] \times \partial\Omega)$. Se tivéssemos $x_0 \in \partial D$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $h(t_0, x_0) = 0$ obteríamos $f(x_0) = x_0$, o que é absurdo. Assim, aplicando (d3) obtemos

$$d(id - f, \text{int} D, 0) = d(id, B_r(0), 0) = 1.$$

Logo, a equação $x - f(x) = 0$ possui pelo menos uma solução em D .

Parte 2. Para o caso de um domínio mais geral, considere a extensão contínua de f dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ \left(\sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) f(a^i), & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

em que $\{a^1, a^2, \dots\}$ é um subconjunto enumerável denso em D e

$$\varphi_i(x) = \max \left\{ 2 - \frac{|x - a^i|}{\varrho(x, D)}, 0 \right\} \quad \forall x \notin D.$$

Mostremos que $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset D$, e que tem ponto fixo. Denotemos por $X = \text{conv} f(D)$ e notemos que $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{X}$. Quando $x \in D$ é trivial. No caso em que $x \notin D$ note que $\tilde{f}(x) = \lim S_m$ onde

$$S_m = \left[\sum_{i \geq 1}^m 2^{-i} \varphi_i(x) \right] \sum_{i \geq 1}^m 2^{-i} \varphi_i(x) f(a^i).$$

Um simples raciocínio verifica que $S_m \in X$. Podemos então concluir que $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{X} = \overline{\text{conv} f(D)}$. Assim, pela compacidade de D , fica provado que $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset D$.

Para concluir, tomemos r suficientemente grande para que D esteja contido em $\overline{B}_r(0)$. Pela primeira parte, existe $x \in \overline{B}_r(0)$ tal que $\tilde{f}$ tem ponto fixo. Mas $\tilde{f}(x) \in D$, o que implica $x \in D$, e daí, que f possui ponto fixo.

Observação. O resultado acima permanece válido se D for somente homeomorfo a um compacto convexo.

Dem.: Suponha que D_0 seja compacto convexo e h o homeomorfismo tal que $D = h(D_0)$. Então $h^{-1}fh : D_0 \rightarrow D_0$ cumpre as condições do Teorema 5.15, e portanto, tem ponto fixo, ou seja, para algum $x_0 \in D_0$ $h^{-1}(f(h(x_0))) = x_0$, isto é, $f(h(x_0)) = h(x_0)$, onde $h(x_0)$ é o ponto fixo de f .

Exemplo (Perrom-Frobenius). Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ com $a_{ij} \geq 0$. Então existe $\lambda \geq 0$ e $x \neq 0$ tal que $x_i \geq 0$ para todo i e $Ax = \lambda x$. Noutras palavras, A tem um autovetor não-negativo correspondente a um autovalor não-negativo.

Exemplo. Não existe uma função contínua definida da bola fechada na sua fronteira que deixe fixos todos os pontos da fronteira.

A partir deste resultado, tem-se uma equivalência ao Teorema do Ponto Fixo, como se segue:

Teorema 5.16 *Suponha que não exista $f : \overline{B}_r(0) \rightarrow \partial B_r(0)$ contínua tal que $f(x) = x$ para todo $x \in \partial B_r(0)$. Então $g : \overline{B}_r(0) \rightarrow \overline{B}_r(0)$ contínua possui um ponto fixo.*

Funções Sobrejetivas

Pelo teorema seguinte tem-se que sob certas condições de crescimento em $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.17 *Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $\left\langle f(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Então $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

Teorema do Ouriço

Teorema 5.18 *Sejam Ω aberto e limitado com $0 \in \Omega$ e $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contínua. Suponha também que o espaço n -dimensional é ímpar. Então existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $f(x_0) = \lambda x_0$, para $\lambda \neq 0$.*

Dem.: Pode-se supor que $f \in C(\overline{\Omega})$. Como n é ímpar então $d(-id, \Omega, 0) = -1$. Considere $d(f, \Omega, 0) \neq -1$. Então $h(t, x) = (1-t)f(x) + t(-x)$ é tal que $h(0, x) = f(x)$ e $h(1, x) = -x = -id(x)$. Se $h(t, x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$ então $d(h(0, \cdot), \Omega, 0) = d(h(1, \cdot), \Omega, 0) = -1$, o que não ocorre por hipótese. Assim, $h(t_0, x_0) = 0$ para algum $t_0 \in (0, 1)$ e $x_0 \in \partial\Omega$. Dessa maneira

$$\begin{aligned} h(t_0, x_0) &= (1-t_0)f(x_0) + t_0(-x_0) \\ 0 &= (1-t_0)f(x_0) + t_0(-x_0) \Rightarrow f(x_0) = \frac{t_0}{1-t_0}x_0 = \lambda x_0 \end{aligned}$$

em que $\lambda = \frac{t_0}{1-t_0} \neq 0$.

Suponha agora que $d(f, \Omega, 0) = -1$. Então $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tx$ é tal que $h(0, x) = f(x)$ e $h(1, x) = x = id(x)$. Se $h(t, x) \neq 0 \forall x \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$ então $d(f, \Omega, 0) = d(id, \Omega, 0) = 1$ o que não ocorre por hipótese. Logo $h(t_0, x_0) = 0$ para algum $t_0 \in (0, 1)$ e $x_0 \in \partial\Omega$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} h(t_0, x_0) &= (1 - t_0)f(x_0) + t_0x_0 \\ 0 &= (1 - t_0)f(x_0) + t_0x_0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{-t_0}{1 - t_0}x_0 = \lambda x_0 \end{aligned}$$

em que $\lambda_1 = \frac{t_0}{t_0 - 1} \neq 0$.

Observação. Uma rotação por $\pi/2$ de uma esfera unitária no $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, isto é $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ é um bom contra-exemplo, quando n é par.

Observação. No caso em que $\Omega = B_1(0)$, o teorema nos diz que não há um campo contínuo de vetores tangentes que não se anule em $S = \partial B_1(0)$. De fato, seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq 0$ e $\langle f(x), x \rangle = 0$ para todo $x \in S$. Pelo Teorema 5.18 existe $x_0 \in S$ tal que $f(x_0) = \lambda x_0$, com $\lambda \neq 0$. Mas

$$\langle f(x_0), x_0 \rangle = \langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \lambda |x_0|^2 = 0$$

implica $x_0 = 0$, que é uma contradição. Logo, f tem valor nulo em algum ponto de S .

Veja dois exemplos que ilustram esta observação.

Exemplos. 1) Suponha que você tenha uma esfera cabeluda. Tente penteá-la, e verá que sempre haverá um redemoinho.

2) O vento na superfície da Terra é um campo contínuo de vetores tangentes à sua superfície. Então, pelo teorema, em pelo menos um ponto sobre a superfície do planeta não venta.

Teorema de Borsuk

Este Teorema é importante pelo fato de garantir a existência de soluções quando f e Ω satisfazem certas condições.

Teorema 5.19 (Borsuk) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e simétrico com respeito à origem, e $0 \in \Omega$. Seja $f \in C(\overline{\Omega})$ uma função ímpar com $0 \notin f(\partial\Omega)$. Então $d(f, \Omega, 0)$ é ímpar.*

O resultado seguinte é uma generalização do teorema.

Corolário 5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e simétrico com respeito à $0 \in \Omega$. Seja $f \in C(\overline{\Omega})$ tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$ e $f(-x) \neq \lambda f(x)$ em $\partial\Omega$ para todo $\lambda \geq 1$. Então $d(f, \Omega, 0)$ é ímpar.*

Corolário 5.2 (Borsuk-Ulam) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como no enunciado do Teorema 5.19, $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua com $m < n$. Então $f(x) = f(-x)$ para algum $x \in \partial\Omega$.*

Dem.: Suponha o contrário, isto é, que $g(x) = f(x) - f(-x) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Seja então $\tilde{g}$ a parte ímpar da extensão contínua de g para todo o $\overline{\Omega}$, a qual é também contínua. Seja agora $\hat{g} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\hat{g} = (\tilde{g}(x), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m \text{ termos}}).$$

Naturalmente, $\hat{g}(-x) = -\hat{g}(x)$ para $x \in \partial\Omega$. Como $0 \notin \hat{g}(\partial\Omega)$ e $\hat{g}$ é ímpar, pelo Teorema 5.19, $d(\hat{g}, \Omega, 0) \neq 0$. Por **(d5)** temos que $d(\hat{g}, \Omega, y) = d(\hat{g}, \Omega, 0) \neq 0$ para todo y em alguma bola n -dimensional $B_r(0)$. Desta forma **(d4)** implica que $\hat{g}(\overline{\Omega})$ contém um aberto de $\mathbb{R}^n$, o que é um absurdo tendo em vista a definição de $\hat{g}$.

Exemplo. Considerando a Terra redonda, uma aplicação deste corolário, é que existem dois pontos opostos sobre a Terra que têm a mesma temperatura e pressão. Se assumirmos que a temperatura e a pressão variam continuamente sobre os pontos da Terra, teremos um caso particular do corolário com a superfície da Terra sendo $\partial\Omega$, $n = 3$ e $m = 2$.

O Teorema 5.19 ajuda encontrar uma condição suficiente para que uma aplicação contínua f seja aberta, a saber: deve ser localmente injetiva.

Teorema 5.20 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e localmente injetiva. Então f é uma aplicação aberta.*

Exemplo. Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, localmente injetora e tal que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$ é obrigatoriamente sobrejetiva.

A Fórmula do Produto

A Fórmula do Produto relaciona o grau de uma aplicação composta $g(f(x))$ com o grau de g e f .

Teorema 5.21 *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$, K_i as componentes conexas limitadas de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ e $y \notin (gf)(\partial\Omega)$. Então*

$$d(gf, \Omega, y) = \sum_i d(f, \Omega, K_i) \cdot d(g, K_i, y)$$

onde somente uma quantidade finita de termos é diferente de zero.

O próximo teorema, aparentemente trivial, exige sutileza na sua demonstração. Com o auxílio do Grau, é possível uma prova menos trabalhosa.

Teorema 5.22 (Jordan) *Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ o traço de uma curva fechada sem auto-intersecções. Então C divide o plano em duas componentes conexas: G_1 e G_2 . Além disso, $C = \partial G_1 = \partial G_2$ e $G_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G_1}$.*

Prova-se que este teorema é equivalente ao seguinte.

Teorema 5.23 *Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ o traço de uma curva homeomorfo a $\partial B_1(0)$, então $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tem exatamente duas componentes conexas.*

O próximo teorema é uma generalização deste último, para o $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.24 *Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos e homeomorfos um ao outro. Então $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$ e $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$ têm a mesma quantidade de componentes conexas.*

Observação Final

Até agora, foi visto que na construção do grau, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ deve ser limitado para que $f^{-1}(y) \subset \Omega$ seja compacto, quando $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ilimitado, ainda é possível encontrar uma função $f \in C(\overline{\Omega})$ tal que $f^{-1}(y)$ seja compacto e $y \notin f(\partial\Omega)$. Nessas condições, pode-se definir o grau da seguinte forma:

Definição. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\tilde{C}(\overline{\Omega})$ o conjunto de toda $f \in C(\overline{\Omega})$ tal que $\sup_{\overline{\Omega}} |x - f(x)| < \infty$. Seja $\tilde{M} = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto, } f \in \tilde{C}(\overline{\Omega}) \text{ e } y \notin f(\partial\Omega)\}$. Então, $\tilde{d} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{Z}$ é definido por $\tilde{d}(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \cap \Omega_0, y)$, onde Ω_0 é qualquer conjunto aberto e limitado que contém $f^{-1}(y)$.

Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - Vol. 1*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides-IMPA, 1976.
- [2] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - Vol. 2*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides-IMPA, 1981.
- [3] SPIVAK, Michael. *Calculus on Manifolds*. New York: Benjamin, 1965.
- [4] KASENAVE, S. *Functional Analysis and Applications*, Bangalore-India, 1989
- [5] DEIMLING, Klaus. *Nonlinear Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1980.