UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Iniciação ao Estudo da Equações Diferencias Elípticas

Relatório Final

RODRIGO ALVES DE OLIVEIRA ARRUDA
Bolsista pelo Programa IM-AGIMB/CNPq

PROF. DR. JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó
Orientador

26 de janeiro de 2004

Sumário

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PLANO DE TRABALHO PARA O BOLSISTA

INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELÍPTICAS

IM-AGIMB - CNPq - UFPB 2004

IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

1. TÍTULO DO PROJETO:

   Iniciação ao Estudo das Equações Diferenciais Elípticas

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

   Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I

3. ÁREA DE PESQUISA:

   Análise

4. SUB-ÁREA DE PESQUISA

   Equações Diferenciais

5. ORIENTADOR:

   Prof. João Marcos Bezerra do Ó

6. COORIENTADOR:

   Prof. Everaldo Souto de Medeiros

7. ORIENTANDO:

   Rodrigo Alves de Oliveira Arruda

8. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

   janeiro de 2003 a dezembro de 2003

APRESENTAÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais tem sido a porta de entrada à pesquisa para muitos matemáticos devido sua aplicabilidade em diversos ramos da ciência, onde destaca-se a Física, Engenharia, Biologia e Economia.

Neste projeto tem-se como ingrediente básico o estudo de vários métodos clássicos e modernos, nos quais darão-se ênfase às técnicas relacionadas com Análise Funcional que vem atuando como uma das mais importantes ferramentas nas pesquisas atuais em Equações Diferenciais.

A orientação ao aluno fundamenta-se me dois aspectos: "a informação"e a "formação". Para a informação serão vistas as técnicas gerais usadas nesta área. Para sua formação será estimulada a busca de soluções mais didáticas dos problemas enfocados, que são adquiridas com leituras de vários textos, desenvolvendo assim habilidades peculiares aos pesquisadores em Matemática.

Para isto é imprescindível o fornecimento de um estudo que permita obter uma boa noção de algumas técnicas mais importantes utilizadas no estudo de problemas elípticos e que sirvam para dar uma idéia desta importante sub-área da Matemática.

Três aspectos serão enfocados no tratamento de Equações Elípticas: o Clássico, uma introdução à Teoria do Potencial e a teoria moderna que envolve uma formulação fraca dos problemas elípticos via Espaços de Sobolev.

Estas três etapas são autosuficientes, porém nas duas últimas etapas precisará apenas de um conhecimento prévio, porém elementar, da integral de Lebesgue e o teorema de Arzelá-Ascoli. Isto será oportunamente suprido através de exposições ministradas pelo orientador.

O método será o usual, o qual tem sido feito com sucesso nas iniciações à pesquisa matemática, isto é realizações de seminários semanais com lista de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

CONTEÚDO DO PROJETO DE PESQUISA

1. EQUAÇOES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS
   (a) Existência e Unicidade de Soluções
   (b) Equações Diferenciais Lineares
   (c) Elementos da Teoria de Sturn-Liouville e Problemas de Contorno
2. EQUAÇÕES DIFERENCIAS PARCIAIS
   (a) O Teorema da Divergência de Gauss
   (b) Derivação Sob o Sinal de Integração
   (c) Alguns Exemplos Clássicos de Equações Diferenciais Parciais da Física-Matemática
      i. Equações de Difusão
      ii. Equações Estacionárias
      iii. Equação da Corda Vibrante
      iv. Equações de Maxwell
3. OPERADOR DE LAPLACE
   (a) Princípio do Máximo
   (b) Inequação de Harnack
   (c) Representação de Green
   (d) A integral de Poisson
   (e) O lema de Weyl
   (f) Teoremas de Convergência
   (g) Estimativas Interiores da Derivada
   (h) O Problema de Dirichlet; o Método das Funções Sub-harmônicas
4. OPERADORES DE SEGUNDA ORDEM ELÍPTICOS
   (a) Princípio do Máximo Fraco
   (b) Princípio do Máximo Forte
   (c) Estimativas Apriori
   (d) Inequação de Harnack
   (e) Operadores na Forma do Divergente

5. EQUAÇÃO DE POISSON E O POTENCIAL NEWTONIANO
   (a) Continuidade de Hölder
   (b) O Problema de Dirichlet para Equação de Poisson
   (c) A Estimativa de Hölder para as Derivadas de Segunda Ordem
   (d) Estimativas na Fronteira
   (e) Estimativas de Hölder para as Derivadas de Segunda Ordem
6. INTRODUÇÃO A CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL
   (a) Espaços de Banach
   (b) Espaços de Hilbert
   (c) Operadores Lineares Limitados
   (d) o Teorema de Representação de Riesz
   (e) A Alternativa de FredHolm
7. UMA INTRODUÇÃO A TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ESPAÇOS DE SOBOLEV
   (a) Distribuições
      i. Definição e Propriedades das Distribuições
      ii. Partição da Unidade
      iii. Transformada de Fourier e Distribuições Temperadas
   (b) Espaços de Sobolev
      i. Definição e Propriedades
      ii. Comportamento na Fronteira
      iii. O Espaço Dual
   (c) Aplicações
      i. Formulação Variacional de Alguns Problemas Elípticos
      ii. Regularidade das Soluções Fracas
      iii. Princípio do Máximo
      iv. Autofunções e Decomposição Espectral

Introdução

Este trabalho é um resumo das atividades exercidas pelo bolsista na Projeto de Iniciação Científica do Instituto do Milênio IM-AGIMB/CNPq/UFPB entre janeiro de 2003 e dezembro de 2003. Serão aqui mostrados: uma exposição introdutória do projeto, objetivos, metodologia, bibliografia utlizada e finalmente, o conteúdo pesquisado e desenvolvido.

Conforme o projeto, a iniciação à pesquisa se deu da seguinte forma: na primeira etapa do trabalho estudou-se resultados básicos das equações diferenciais ordinárias e às Equações Diferenciais Parciais, o Operador de Laplace. Enquanto que na segunda etapa foi desenvolvido um estudo sobre os conceitos básicos de Análise Funcional tais como espaços de Banach e Hilbert, Operadores Lineares Limitados, estudou-se também a Teoria dos Espaços de Sobolev e por fim aplicações tais como Princípio do Máximo, Regularidade das Soluções Fracas entre outras.

O aluno reconhece que um projeto desse alcance, promovido pelo IM-CNPq-UFPB, é de grande importância para o desenvolvimento acadêmico do aluno, pois o memso está em contato direto com o "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise", coordenado pelo Prof. João Marcos, e do qual fazem parte pessoas do Doutorado, Mestrado e Graduação.

Um outro ponto acerca da importância do projeto é o fato dele estimular o desenvolvimento do estudo em grupo, o espírito de equipe. O grande desenvolvimento científico é resultado de várias ações conjuntas em todas as áreas da ciência, em especial da Matemática. A atividade de iniciação científica vem amadurecer essa qualidade, tornando-se para o bolsista muito gratificante.

O orientador é o Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, o coorientador é o Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros, ambos do Departamento de Matemática, e o orientando é o aluno Rodrigo Alves de Oliveira Arruda, matrícula n.º 10211111. O projeto teve início em janeiro de 2003 com término em dezembro de 2003.

Objetivo

Os objetivos deste projeto não se restringe de maneira nenhuma a um conhecimento apenas sobre Equações Diferenciais Elípticas. Listamos abaixo os objetivos do projeto tanto em relação às Equações Diferenciais Elípticas como os citados anteriormente.

1. Estudar alguns métodos modernos de Análise Funcional, ferramenta importante na pesquisa de EDP's;
2. O estudo do Operador de Laplace;
3. O estudo da Equação de Poisson e do Potencial Newtoniano;
4. Uma introdução à Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev;
5. Compreensão dos resultados básicos sobre os três exemplos clássicos de EDP's da Física-Matemática, Equações de Onda, do Calor, e de Laplace.
6. Aprofundamento de conhecimento adquiridos na própria graduação;
7. Incentivo à continuação dos estudos em uma Pós-Graduação
8. Desenvolvimento do trabalho científico em grupo;
9. Compreensão sobre os trabalhos feitos em uma pesquisa matemática;
10. Interação com outros alunos de iniciação científica, assim como pessoas da Pós-Graduação.

Metodologia

A metodologia utilizada é aquela já aplicada à Iniciação Científica. Também pelo fato do bolsista estar envolvido no "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise" ele utilizou-se de outras metodologia:

1. Apresentação semanais de temas para o orientador;
2. Leituras de textos da bibliografia recomendada;
3. Realização do estudo em grupo;
4. Apresentação de temas para outros bolsistas que estão ligados ao grupo de pesquisa coordenado pelo Prof. João Marcos;

5. Participação em ciclo de palestras promovidos pelo grupo já citado

Cronograma de Execução do Projeto

Apresentaremos agora as partes desenvolvidas do projeto e logo em seguida exibiremos os principais resultados obtidos durante o estudo.

Primeira etapa- de janeiro 2003 até junho de 2003

Foi estudado alguns resultados básicos das Equações Diferenciais Ordinárias; uma introdução as Equações Diferenciais Parciais; o Operador de Laplace;

Segunda etapa - de julho de 2003 até dezembro de 2003

Estudamos uma breve introdução aos conceitos básicos da análise funcional fizemos uma Introdução a teoria dos espaços de Sobolev e aplicações a alguns problemas elípticos variacionais.

O primeiro capítulo contem um resumo das atividades desenvolvidas pelo orientando, enquanto que os capítulos seguintes contém um resumo de algumas atividades desenvolvidas pelo orintando em paralelo ao projeto e as quais foram de grande valia para o mesmo.

Capítulo 1

Introdução ao Estudo da Equações Diferenciais Elípticas

Neste capítulo veremos todo o conteúdo visto pelo orientando ao longo do projeto

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Seja a equação diferencial

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0^1$$

então ela é dita *linear* se F é uma função linear das variáveis $y, y', ..., y^n$. Deste modo, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_0(x)y = g(x)$$

uma equação que não tem a forma acima é uma equação *não-linear*. Vejamos alguns exemplos:

$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ (linear)

$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)$ (linear)

$y'' + yy' + y = x$ (não-linear)

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta$ (não-linear)

[1] Esta equação representa a relação entre a variável independente x e os valores da função y e suas n primeiras derivadas $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Teorema 1.1 *Sejam as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em algum retângulo $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (x_0, y_0). Então, em algum intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$, contido em $\alpha < x < \beta$, existe uma solução única $y = \phi(x)$ do problema de valor inicial*

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

Definição 1.1 *Seja a equação com coeficientes reais da forma*

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0$$

onde λ é um parâmetro real e as funções $\rho(x)$ e $p(x)$ são positivas. Esta equação é chamada de equação de Sturm-Liouville.

1.2 Equações Diferenciais Parciais

O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS: Seja $\Omega \subseteq R^2$ um domínio cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves. Seja $F : \Omega \to R^2$ um campo vetorial de classe C^1 em Ω. Então

$$\int_\Omega \nabla \cdot F dxdy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \check{n} ds,$$

onde $\check{n}$ é a normal externa unitária.

A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO: O problema motivador da equação do calor é o da difusão térmica em barra, apenas considerando-se a sua dimensão longitudinal, isto é, tendo-se isolado a barra ao longo de seu comprimento, permitindo-se, assim, trocas de calor apenas nos seus extremos. No âmbito do nosso estudo e nas condições já expostas, a variação de energia interna da barra será o acrécimo de calor sensivel. Em símbolos:

$$[F(x,t) - \nabla(-k(x)\nabla u(x,t)]\Delta t = \rho(x)c(x)[u(x,t+\Delta t - u(x,t)]$$

No limite:

$$F(x,t) + \nabla(k(x)\nabla u(x,t)) = \rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y)$$

EQUAÇÕES DE LAPLACE E POISSON: É notório que toda função complexa

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

satisfaz as condições de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial Rf(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Rf(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial \Gamma f(x,y)}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$$

As funções u e v que satisfazem a relação acima (a equação de Laplace) são chamadas funções Hamônicas. No caso do calor (difusão), quando buscamos soluções estacionárias (independente do tempo), encontramos funções harmônicas (sem fontes de calor e impondo $u_t = 0$). Se permitirmos fontes estacionárias, obtemos a equação de Poisson:-

$$-\Delta u = G(x)$$

EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE: Vamos supor a corda somente sujeita a vibrações transversais e desprovida de resistência a flexão. A 2^olei de Newton garante que a resultante sobre a corda é igual à soma das forças internas, de tensão, e as forças externas, assim:

$$\mathsf{T}_0[\mathsf{sen\ a}(\mathsf{x}+\Delta\mathsf{x}) - \mathsf{sen\ a}(\mathsf{x})] + \mathsf{F}(\mathsf{x},\mathsf{t}) = \rho(\mathsf{x})\Delta\mathsf{x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Ademais, dividindo ambos os menbros por Δx e levando tudo ao limite, resulta

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

EQUAÇÕES DE MAXWELL: A tabela abaixo lista as equações e seu significado físico:

$\nabla\overrightarrow{E}(\mathsf{x},\mathsf{t}) = \rho(\mathsf{x},\mathsf{t})$	Carga e campo elétrico
$\nabla\overrightarrow{H}(\mathsf{x},\mathsf{t}) = 0$	O campo magnético
$\mathsf{rot}\overrightarrow{E}(\mathsf{x},\mathsf{t}) = -\frac{\mu}{c}\overrightarrow{H}_t(\mathsf{x},\mathsf{t})$	Campo elétrico produzido por um campo magnético variável
$\mathsf{rot}\overrightarrow{H}(\mathsf{x},\mathsf{t}) = \frac{\varepsilon}{c}\overrightarrow{E}_t(\mathsf{x},\mathsf{t}) + \frac{4\pi\sigma}{c}\overrightarrow{E}(\mathsf{x},\mathsf{t})$	Campo magnético produzido por um campo elétrico variável ou uma corrente, ou ambos

1.3 O Operador de Laplace

Princípios de Máximo

Princípio do Máximo Fraco Princípio do Máximo Fraco: Seja o operador elíptico de segunda ordem

$$Lu \equiv a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

onde a matriz a_{ij} é simétrica e esttritamente positiva. Assuma que $Lu \geq 0 (Lu < 0)$ em um domínio limitado Ω e $c(x) = 0$ em Ω. Então o máximo (mínimo) de u é assumido, em princípio, na fronteira de Ω.

Princípio do Máximo Forte Assuma $Lu \geq 0$ e considere x_o um ponto da fronteira de Ω tal que $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Também suponha que, em uma vizinhança de x_0, a fronteira de Ω é de classe C^2 e que u é diferenciável em x_0. Suponha também que

1) $c = 0$; ou
2) $c \leq 0$ e $u(x_0) \geq 0$; ou ainda
3) $u(x_0) = 0$.

Então a derivada de u, avaliada em $x_0 nadire$ção normal à fronteira, é estritamente positiva.

Princípio do Máximo Forte: Assuma $Lu \geq 0 (Lu \leq 0)$ em Ω (não necessariamente limitado) e que u não é constante. Se $c = 0$ então u tem máximo (mínimo) no interior de Ω. Se $c > 0$, então u não tem máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de Ω. Independentemente do sinal de c, o máximo (mínimo) de u não pode ser zero no interior.

Teorema da Simetria

Teorema da Simetria: Seja a função $f : R \to R \in C^1$. Considere a bola $B_R(0) \subset R^n$, na qual tem-se uma solução $u > 0$, de classe $C^2(B)$ da equação

$$\triangle u + f(u) = 0$$

com condição de fronteira$u = 0$ em ∂B

$$u = 0, \text{ em } \partial B$$

Nesses termos, u é radialmente simétrica e estritamente decrescente monótona:

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0 \text{ para } 0 < r < R$$

independentemente da forma de f.

Lema 1. Seja $x_0 \in \partial B \cap \{x_1 > 0\}$. Então, para algum $\delta > 0$ teremos $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$ em $B \cap \{| x - x_0 |< \delta\}$.

Demonstração: Se o lema fosse falso, haveria em B uma sequência $\{x_n\}$ com $u_{x_1}(x_j) \geq 0$ e $x_j \to x_0$. Além disso, uma vez que u é positiva em B e nula na fronteira, devemos ter que $u_{x_1}(x_0) \leq 0$ e, por argumenton de continuidade, encontraremos $u_{x_1}(x_0) = 0$. Já que $u \equiv 0$ em ∂B, todas as derivadas tangenciais se anulam e, uma vez que na direção associada a x_1 está fora do plano tangente, concluímos que o gradiente $\nabla u_x(x_0)$ é nulo também.

Prova-se que a derivada segunda $u_{x_1x_1}(x_0)$ também é zero mediante o seguinte artifício. Uma vez que $u(x_0) = u_{x_1}(x_0) = 0$ e $u > 0$ em B, teremos que $u_{x_1x_1}(x_0) > 0$. Por conseguinte, $u_{x_1x_1}$ também é positiva em uma vizinhaça N, pelo que teremos

$$u_{x_1}(y_j) - u_{x_1}(x_j) = \int_\Gamma u_{x_1x_1}(x)dx_1 > 0$$

o que não pode ocorrer, pois $u_{x_1}(x_j) \geq 0$ e $u_{x_1}(y_j) \leq 0$.

Agora suponhamos que $f(0) \geq 0$. Daí,

$$\triangle u + f(u) - f(0) \leq 0$$

e, pelo teorema do valor médio, podemos encontrar uma função $c(x)$ tal que $f(u) - f(0) = c(x)u$. Mas o princípio do máximo forte aplicado a $(-u)$ implica $u_{x_1}(x_0) < 0$ (contradição).

Por outro lado, suponhamos que $f(0) < 0$. Então, $\triangle u(x_0) = -f(0) > 0$. Uma vez que $u = 0$ em ∂B e o gradiente $\nabla u(x_0)$ é nulo, haverá $u_{x_1x_1}(x_0) = n_1^2 \triangle u(x_0) \neq 0$ (n é a normal unitária a ∂B), ma isso tambe´m é uma contradição. q.e.d.

Para $\lambda \in R$, seja T_λ o plano $x_1 = \lambda$ e seja $\sum(\lambda) = B\cap \mid x_1 > \lambda \mid$. Seja $\sum^{'}(\lambda)$ a reflexão de $\sum(\lambda)$ sobre T_λ e x^λ a reflexão de um ponto x em T_λ. Teremos o seguinte:

Lema 2. Assuma que, para algum $\lambda \in [0, R)$ se tenha

$$u_{x_1}(x) \leq 0, u(x) \leq u(x^\lambda) \veebar x \in \sum(\lambda)$$

mas de modo que $u(x)$ não é identicamente igual a $u(x^\lambda)$ em $\sum(\lambda)$. Então $u(x) < u(x^\lambda)$ em todos os pontos de $\sum(\lambda)$ e $u_{x_1}(x) < 0$ em $B \cap T_\lambda$.

Demonstração: Seja $v(x) = u(x^\lambda)$ em $\sum^{'}(\lambda)$. Então v satisfaz a equação $\triangle v + f(v) = 0$. Fazendo $w = u - v$ e $c(x)$ verificando $f(v) - f(u) = c(x)w$ (TMV), resulta

$$\triangle w + c(x)w = 0$$

em $\sum^{'}(\lambda)$. Ora, por hipótese temos $w \leq 0$ em $\sum^{'}(\lambda)$ e w não é identicamente zero lá. Além disso, w se anula em $T_\lambda \cap B$, que faz parte da fronteira de $\sum^{'}(\lambda)$. Segue do princípio do máximo forte que $w < 0$ em $\sum^{'}(\lambda)$ e $w_1 > 0$ em $T_\lambda \cap B$. Como $w_1 = -2u_1$ em $T_\lambda \cap B$, conclui-se a demostração. q.e.d.

Lema 3. Para qualquer $\lambda \in (0, R)$, teremos

$$(*) \qquad u_{x_1}(x) < 0, u(x) < u(x^\lambda) \qquad \veebar x \in \sum(\lambda)$$

Por continuidade temos que $u(x) \leq u(x_0)$ em $\sum(0) = B \cap \{x_1 > 0\}$. O mesmop argumento aplicado a $(-x_1)$ implica que $u(x) \geq u(x_0)$ em $\sum(0)$. Pode-se falar, pois, em uma simetria de u no plano $x_1 = 0$.

Demonstração: Do lema 2, segue que a equação $(*)$ vale para λ bastante próximo de R. Escolhamos um valor crítico (máximo) μ de λ para a equação citada. A continuidade implica que

$$u_{1(x)} < 0, \quad u(x) \leq u(x^\lambda) \qquad \veebar x \in \sum(\mu)$$

Queremos mostrar que $\mu = 0$. Assumindo que $\mu > 0$, teremos, para qualquer ponto $x_0 \in \frac{\sum(\mu)}{T_\mu}, x_0^\mu \in B$ e, consequentemente, $0 = u(x_0) \neq u(x_0^\mu)$, pelo que $u(x)$ não é identicamente igual a $u(x^\mu)$ em $\sum(\mu)$, caso em que podemos aplicar o lema 2. Dessa forma, $u(x) < u(x^\mu)$ em $\sum(\mu)$ e $u_1 < 0$ em $B \cap T_\mu$. Então a equação $(*)$ vale para $\lambda = \mu$. Além disso, pelo lema 1 temos que $u_1 < 0$ em uma vizinhança de qualquer ponto de $T_\mu \cap \partial B$ e, assim, cada ponto de $T_\mu \cap B$ possui uma vizinhança na qual $u_{x_1} < 0$. Pela compacidade de $T_\mu \cap B$ deveremos ter $u_1 < 0$ em $\sum(\mu - \varepsilon)$ para ε pequeno.

Como havíamos assumido μ como um valor crítico, haverá uma sequência λ_j e $x_j \in \sum(\lambda_j)$ tal que $\lambda_j \to \mu$ e

$$u(x_j) \geq u(x_j^{\lambda_j})$$

Haverá convergência de alguma sequência x_j e o limite x estará no fecho de $\sum(\mu)$. No limite, teremos:

$$u(x) > u(x^\mu)$$

o que não poderia valer para x na fronteira ∂B, onde $u(x) = 0$ e $u(x^\mu) > 0$. Mas $(*)$ vale para μ e deveremos, pois, ter $x \in T_\mu \cap B$. Portanto, $x^\mu = x$. Por outro lado, o segmento reto que liga x_j a $x_j^{\lambda_j}$ pertence a B e, por causa da equação $[u(x_j) \geq u(x_j^{\lambda_j})]$ e do (TVM), conterá um ponto y_j tal que $u_1(y_j) \geq 0$. Fazendo j tender ao infinito, teremos $u_1(x) \geq 0$. Contradição! q.e.d.

1.4 Introdução a Conceitos Básicos de Análise Funcional

Definição 1.2 ***(Espaço normado)***

Um espaço vetorial V é normado quando definimos uma função $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ (denominada norma) que, para cada $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|.\|(x) = \|x\|$ goza das seguintes propriedades:

N1. $\|x\| \geq 0$

N2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

N4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Este espaço normado é denotado por $(V, \|.\|)$ ou , mais frequentemente visto, por V

Definição 1.3 ***(Espaço de Bannach)*** *Um espaço normado é denominado espaço de Bannach quando o mesmo é completo em relação à métrica induzida por sua norma.*

Exemplo 1.1 *$C[a, b]$ é definido como o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo fechado é de Bannach com a norma dada por:*

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} \{x(t)\}$$

Definição 1.4 ***Operadores lineares limitados***. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear onde $D(T) \subset X$. O operador T é limitado se existe um numéro real c tal que para todo $x \in D(T)$,*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

É definido também:

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \text{com } x \neq 0$$

$\|T\|$ é chamada de norma do operador T.

Definição 1.5 ***(Espaço de Hilbert)*** *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo (na norma definida pelo produto interno).*

Teorema 1.2 ***(Teorema da representação de Riez-Frechet)***.
$\forall f \in H'$ $\exists u \in H$ único tal que

$$f(v) = < u, v > \quad \forall v \in H \tag{1.1}$$

Além disso, é verificada a seguinte igualdade:

$$||z|| = ||f|| \tag{1.2}$$

Definição 1.6 *Sejam E e F espaços de Banach. Diz-se que um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é compacto se $T(B_E)$ é relativamente compacto na topologia forte. Define-se por $\mathcal{H}(E,F)$ o conjunto dos operadores compactos e denota-se*

$$\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}(E,E)$$

Teorema 1.3 (Alternativa de Fredholm) *Seja $T \in \mathcal{H}(E)$. Então*

1. *$N(I-T)$ é de dimensão finita,*
2. *$R(I-T)$ é fechado, e mais exatamente $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$*
3. *$N(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = E$*
4. *$dim\ N(I-T) = dim\ N(I-T^*)$.*

1.5 Uma Introdução aos Espaços de Sobolev

Definição 1.7 *Denota-se $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ ;\ \exists g \in L^p(\Omega)\ \ tal\ que\ \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi\ \ \forall \varphi \in C^1_c(\Omega)\}$$

escreve-se $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $u' = g$.

Enunciamos o seguinte problema com a finalidade de mostrar a motivação ao estudo dos Espaços de Sobolev.

Consideremos o seguinte problema. Dada uma $f \in C([a,b])$ existe uma função $u(x)$ que verifica

$$\begin{cases} -u'' + u = f & em\ \ [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Uma solução clássica do problema (1.3) é uma função de classe C^2 em $[a,b]$ que verifica (1.3) no sentido usual. Ignoraremos aqui o fato de (1.3) poder ser resolvida explicitamente com um cálculo bem simples. Faremos isto com o propósito de ilustrar o método a partir deste exemplo elementar:

Multiplica-se (1.3) por $\varphi \in C^1[a,b]$ e integra-se por partes; assim temos

$$\int_a^b u^{'}\varphi^{'} + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{1.4}$$

observe que (1.4) tem sentido se $u \in C^1([a,b])$ (contrariamente a (1.3), que suponhe u derivável duas vezes);de fato, seria suficiente ter $u, u^{'} \in L^1(a,b)$, $u^{'}$ num sentido a determinar. Digamos (provisoriamente) que uma função u de classe C^1 que verifica (1.4) é uma solução fraca de (1.3).

O programa seguinte descreve as linhas do enfoque variacional da teoria das equações em derivadas parciais:

1. Precisa-se da noção de solução fraca, isto ocorre com os Espaços de Sobolev, que são as ferramentas básicas.

2. Estabelecem-se a existência e a unicidade de uma solução fraca com o método variacional, via o Teorema de Lax-Milgran.

3. Mostra-se que a solução fraca é de classe C^2 (por exemplo); um resultado de regularidade.

4. Recuperação da solução clássica. Mostra-se que toda solução fraca de classe C^2 é solução clássica.

   A etapa (4) é muito simples. De fato, suponhamos que $u \in C^2([a,b])$, $u(a) = u(b) = 0$ e que u verifica (1.4). Fazendo uma integração por partes em (1.4) obtemos

$$\int_a^b (-u^{''} + u + f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \;\; \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

e assim

$$\int_a^b (-u^{''} + u + f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\,]a,b[\,)$$

Como $C_c^1(]a,b[)$ é denso em $L^2(a,b)$, $-u^{''} + u = f \;\; q.t.p$ (de fato em todo ponto já que $u \in C^2$).

Capítulo 2

Condução do Calor numa barra

Este capítulo tem a finalidade de expor a motivação para o estudo das Séries de Fourier por meio de um exemplo sobre a condução do calor numa barra. Na resolução deste problema utilizaremos o Cálculo Diferencial e Integral e as Equações Diferenciais, porém concluiremos que estes não são suficientes, fazendo com que necessitemos de algo mais, que serão as Séries de Fourier.

2.1 Dedução da Equação do Calor

Consideremos uma barra de comprimento L, cuja secção transversal tem área A, feita de um material condutor uniforme de calor. Suponhamos que ela esteja isolada termicamente nas laterais, não permitindo a troca de calor com o meio ambiente, porém podem ocorrer tais transferências nas extremidades da barra.

O fato do material ser uniforme e a barra ser isolada termicamente nas laterais fazem com que o fluxo de calor se dê somente na direção longitudinal, passando o nosso problema para apenas uma dimensão.

A lei do resfriamento de Fourier diz que: sejam duas placas P_1 e P_2, de áreas A, mantidas constantemente às temperaturas T_1 e T_2, respectivamente; quando colocadas paralelamente a uma distância d uma da outra, o calor passará da mais quente para a mais fria, e a quantidade de calor, por unidade de calor, transferida é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d} \tag{2.1}$$

onde k é a *condutibilidade térmica* do material entre as placas.

Imaginemos que a barra, ao longo do seu comprimento, esteja colocada sobre o eixo x. Representemos por $u(x,t)$ a temperatura de um ponto de abcissa x no tempo t. A temperatura independe das coordenadas espaciais y e z, já que as várias grandezas físicas são constantes em cada secção tranversal, podendo variar de uma secção para outra.

Tomemos duas secções transversais em x e $x + d$ e imaginemos como duas placas. Mas há um problema: a temperatura não é constante. Para resolvermos isto, introduzimos a grandeza fluxo de calor através de uma secção x, num instante t, que será assim: fixemos t na Eq. 2.1, façamos $T_2 = u(x+d,t)$ e $T_1 = u(x,t)$ e calculemos o limite quando d tende a zero. Teremos então, $kA|u_x(x,t)|$ e definimos o fluxo de calor na direção positiva do eixo x como uma função $q(x,t)$ dada por

$$q(x,t) = -kAu_x(x,t)$$

Obs. 2.1 *Se a temperatura u crescesse com x, u_x seria positivo; mas, como o calor fluiria para a esquerda, q deveria ser negativo. Por outro lado, se u decrescesse com x, u_x seria negativo, mas, como o calor fluiria para a direita, q deveria ser positivo. Esse é o motivo para o sinal negativo.*

Fixemos um elemento da barra x_0 e $x_0+\delta$, e calculemos a quantidade de calor que aí entra, no intervalo t_0 e $t_0+\tau$. Então

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0,t)dt \quad - \quad \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0+\delta,t)dt$$

ou

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0+\delta,t) - u_x(x_0,t)]Adt \tag{2.2}$$

Sabe-se da Física que o calor específico c de uma substância é a quantidade de calor q necessária para elevar em 1°C a temperatura de um grama dessa substância. Então

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x,t)dxAdt \tag{2.3}$$

onde ρ é a densidade da substância.

Aplicando o teorema fundamental do cálculo na Eq. 2.2 e igualando com a Eq. 2.3, obtemos a seguinte igualdade

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x,t)dxdt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x,t)dxAdt$$

Sendo esta última expressão válida $\forall t_0, x_0, \tau, \delta > 0$ e $x_0 < L$, podemos concluir que

$$Ku_{xx} = u_t \tag{2.4}$$

onde $K = k/c\rho$ é a *difusibilidade térmica.*

A Eq. 2.4 é chamada a equação do calor, sendo a lei de variação da temperatura $u(x,t)$ numa barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente.

Obs. 2.2 *Para a conclusão deste resultado foram feitas as seguintes hipótese:*

1. *lei do resfriamento de Fourier (Eq. 2.1)*
2. *quantidade de calor em função do calor específico (Eq. 2.3)*
3. *a temperatura é uma função contínua de derivadas parciais de classe C^2 na região do plano (x,t), com $0 < x < L$ e $t > 0$.*

A Eq. 2.4 possui várias soluções e por isso precisamos de uma condição inicial do problema. Ora, a distribuição de temperatura deve depender da temperatura inicial ao longo da barra, ou seja, em termos matemáticos precisamos de uma função que descreva a temperatura ao longo da barra no instante $t = 0$.

$$u(x,0) = f(x) \qquad f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Além disso, precisamos saber o que ocorre nas extremidades da barra ao longo do processo. Isto é o que chamamos de *condições de fronteira.*

2.2 Formulação Matemática

Seja $\Re$ a região do plano (x,t) dada por $0 < x < L$ e $t > 0$ e $\overline{\Re}$ a união de $\Re$ com a fronteira, esta formada pelas semi-retas $\{x = 0, t > 0\}$ e $\{x = L, t > 0\}$ e pelo segemento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$. O problema da condução do calor consiste em determinar uma função $u(x,t)$ definida em $\overline{\Re}$ satisfazendo a equação do calor (Eq. 2.4) em $\Re$, a condição inicial (Eq. 2.5) e a condição de fronteira, que no nosso caso as temperaturas nas extremidades da barra são mantidas constantemente zero, ou seja,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{2.6}$$

Com isto nós temos um *problema de valores inicial e de fronteira.*

Iniciaremos a resolução do problema aplicando o *Método de Fourier*, o qual consiste em usar separação de variáveis e encontrar soluções na forma $u(x,t) = F(x)G(t)$. Para isto não usaremos da rigorosidade matemática.

Substituindo $u(x,t) = F(x)G(t)$ na equação do calor, obtemos $F(x)G'(t) = KF''(x)G(t)$, isto é

$$\frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \tag{2.7}$$

admitindo que $G(t)$ e $F(x)$ nunca se anulam.

O lado esquerdo depende apenas de t e o direito apenas de x, portanto ambos independem de x e t. Assim

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \quad e \quad \frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma \tag{2.8}$$

sendo σ independente de x e t.

Da primeira equação de 2.8 temos

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0 \qquad x \in]0, L[\tag{2.9}$$

e

$$F(0) = F(L) = 0 \tag{2.10}$$

pois, $u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \forall t > 0$. Se $F(0) \neq 0$ então $G(t) \equiv 0$ e, logo $u \equiv 0$. E para satisfazer a condição inicial (Eq. 2.5) teríamos que ter $f(x) \equiv 0$.

Analisemos agora os valores de σ que resultam em soluções $F(x)$ do problema dado pelas Eqs. 2.9 e 2.10. Somente nos interessa soluções não nulas.

1. $\sigma > 0$

   Teremos a solução da seguinte forma

   $$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

   Pela Eq. 2.10 teremos que $c_1 = c_2 = 0$, ou seja, $F \equiv 0$

2. $\sigma = 0$

   Teremos a solução da seguinte forma

   $$F(x) = c_1 x + c_2$$

   Novamente pela Eq. 2.10 teremos que $c_1 = c_2 = 0$, ou seja, $F \equiv 0$

3. $\sigma < 0$

   Fazendo $\sigma = -\lambda^2$, a solução será da forma

   $$F(x) = c_1 \cos \lambda x \ + \ c_2 \sin \lambda x$$

   Pela Eq. 2.10 teremos que $c_1 = 0 \;\; e \;\; c_2 \sin \lambda L = 0$. Como nos interessa $c_2 \neq 0$, teremos $\sin \lambda L = 0$ e $\lambda L = n\pi, \; n \in \mathbb{Z}^*$.

Os valores de $-\sigma = \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ são os autovalores do problema dado pelas Eqs. 2.9 e 2.10. Enquanto que as funções $F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$ são as autofunções do mesmo problema.

Agora, vejamos a segunda equação em 2.8. A solução geral é:

$$G(t) = ce^{\sigma K t}$$

Logo, para cada n temos uma função

$$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

que satisfaz 2.4 e 2.6.

Um problema que surge é que $u_n(x,0) = \sin\frac{n\pi x}{L}$ somente será a solução das Eqs. 2.4, 2.5 e 2.6 se a função $f(x)$ dada fosse

$$f(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Como a equação 2.4 é linear temos então pelo princípio da superposição que: se $u(x,t)$ e $v(x,t)$ forem soluções, então qualquer função da forma $au(x,t)+bv(x,t)$, com a e b constantes, será solução. Valendo também para combinações finitas de soluções.

Com isto, se a condição inicial $f(x)$ for da forma

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

a solução será

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Surge então a questão da $f(x)$ não ser da forma acima. Ou seja, suponha que a função possa ser expressa em uma série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{2.11}$$

O candidato à solução será

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{2.12}$$

É natural surgirem questões sobre tal suposição:

1. A função $f(x)$ pode ser escrita da forma 2.11

2. Sendo a função 2.12 definida por uma série, questiona-se sobre sua convergência e se a função satisfaz 2.4

Todas essas questões acabaram por motivar o desenvolvimento da Análise de Fourier, que será abordada no próximo capítulo.

Capítulo 3

Análise de Fourier

No capítulo anterior surgiu a necessidade de sabermos quando uma função $f(x)$, com $x \in [0, L]$, pode ser expressa como uma série infinita da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

com os c_n escolhidos adequadamente.

Dado o seguinte problema:

$$\begin{gathered} u_t = K u_{xx}, \quad em \;\; \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad para \;\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad para \;\; 0 < x < L \end{gathered}$$

De maneira semelhante ao que já foi feito, neste problema encontramos também a questão de saber se uma função $f(x)$ pode ser expressa como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

E daí, surge a questão geral: quais funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podem ser expressas na forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 \; + \; \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \; + \; b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{3.1}$$

3.1 Coeficientes de Fourier

Inicialmente façamos algumas considerações

Definição 3.1 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $T \neq 0$ se $f(x + T) = f(x)$ para todo x. O menor período positivo é chamado o período fundamental, ou simplesmente período.*

Proposição 3.1 *O período fundamental da funções* $\sin \frac{n\pi x}{L}$ *e* $\cos \frac{n\pi x}{L}$ *é* $T = \frac{2L}{n}$

Definição 3.2 *Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, irá convergir pontualmente se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir. Ou seja, dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe um inteiro $N = N(\varepsilon, x_0)$, tal que*

$$\left| \sum_{j=n}^{m} u_j(x_0) \right| < \varepsilon \qquad \forall\ m > n > N$$

Definição 3.3 *Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente se, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $N = N(\varepsilon)$, tal que*

$$\left| \sum_{j=n}^{m} u_j(x) \right| < \varepsilon \qquad \forall\ m > n > N$$

Proposição 3.2 *Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.*

Proposição 3.3 *Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx$$

Proposição 3.4 *Suponhamos que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convirja. Então*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

Proposição 3.5 *(Relações de ortogonalidade)São válidas as igualdades abaixo:*

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad se \ \ n, m \geq 1 \tag{3.2}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} L, & se\ n = m \geq 1, \\ 0, & se\ n \neq m, \quad n, m \geq 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} L, & se\ n = m \geq 1, \\ 0, & se\ n \neq m, \quad n, m \geq 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Se uma função for expressa da forma 3.1, é natural pensarmos que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente ligados à função.

Suponhamos que ocorra a igualdade 3.1 e que esta série convirja uniformemente. Pela prop. 3.2 f é contínua, logo integrável e periódica de período 2L, pois 2L é período das funções seno e cosseno na série. Pela prop. 3.3 integramos os dois lados de 3.1 obtemos

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L} dx \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx \ + \ b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

e

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \tag{3.5}$$

porque

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

Com a mesma idéia e usando as relações de ortogonalidade obtemos:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n \geq 0 \tag{3.6}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n \geq 1 \tag{3.7}$$

Com isto, temos a seguinte definição:

Definição 3.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2L, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular $\int_{-L}^{L} |f(x)|dx < \infty$. Os números a_n, para $n \geq 0$, e b_n, para $n \geq 1$ dados em 3.6 e 3.7 são definidos como os coeficientes de Fourier.*

Obs. 3.1 *A desigualdade abaixo dá uma idéia do motivo da hipótese de f ser integrável e absolutamente integrável.*

$$\left|\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right| \leq \int_{-L}^{L} |f(x)|dx$$

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2L, integrável e absolutamente integrável, podemos encontrar os seus coeficientes de Fourier pelas expressões acima e escrever

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \ + \ b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\Big) \tag{3.8}$$

que é a série de Fourier de f (expressão do lado direito)

Antes de enunciarmos o Teorema de Fourier, que nos dá condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f, vejamos algumas definições.

Definição 3.5 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Ou seja, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < ... < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}), $j = 1, ..., n-1$, e existem os limites*

$$f(a_j + 0) = \lim_{x\to a_j^+} f(x) \quad\quad e \quad\quad f(a_j - 0) = \lim_{x\to a_j^-} f(x)$$

Definição 3.6 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.*

Com estas definições enunciamos o Teorema de Fourier

Teorema 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período 2L. Então a série de Fourier da função f, dada por 3.8, converge, em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \ + \ b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\Big) \tag{3.9}$$

3.2 Integração de série de Fourier

Se uma função for igual à sua série de Fourier, a qual supõe-se convergir uniformemente, pela prop. 3.3 temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b a_n \cos\frac{n\pi x}{L}dx \ + \ \int_a^b b_n \sin\frac{n\pi x}{L}dx\right) \quad (3.10)$$

Nesta seção veremos que a Eq. 3.10 é válida mesmo se a série de Fourier não convergir uniformente ou não convergir para f.

Teorema 3.2 *(Teorema sobre a Integração de séries de Fourier) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função periódica de período 2L e seccionalmente contínua e seja*

$$\frac{1}{2}a_0 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \ + \ b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.11)$$

sua série de Fourier. Então:

1. a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de f; mais precisamente,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^b \cos\frac{n\pi x}{L}dx \ + \ b_n\int_a^b \sin\frac{n\pi x}{L}dx\right) \quad (3.12)$$

2. a função $F(x) = \int_0^x [f(t) - (a_0/2)]dt$ é periódica de período 2L, contínua, tem derivada F' seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-b_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{L} \ + \ \frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.13)$$

e

$$\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)dx \quad (3.14)$$

Demonstração

Tomemos uma função periódica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de período 2L e seccionalmente contínua. Definimos a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ da seguinte forma

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt \quad (3.15)$$

que é contínua.

Pelo teorema fundamental do Cálculo, existe $F'(x)$ em todos os pontos de continuidade de f e $F'(x) = f(x)$ nestes pontos. Portanto, $F'(x)$ é seccionalmente contínua.

Usando o fato de que $F(x)$ e $f(t) - \frac{a_0}{2}$ são de período 2L e de que $\int_{a-L}^{a+L} g = \int_{-L}^{L} g$ para g de período 2L e a fixo, $a \in \mathbb{R}$, temos

$$F(x+2L) - F(x) = \int_{x}^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^{L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = 0$$

e

$$\int_{-L}^{L} f(t)dt = \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} dt$$

Temos então que $F(x)$ em 3.15 é contínua, a derivada é contínua por partes e de período 2L. Logo, pelo Teorema de Fourier

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \; + \; B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{3.16}$$

onde A_n e B_n são definidos pelas fórmulas 3.6 e 3.7 (em vez de $f(x)$ será $F(x)$).

Usando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$A_n = \frac{1}{L} \left[F(x) \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} F'(x) \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

e

$$A_n = \frac{-L}{n\pi} b_n, \qquad n \geq 1 \tag{3.17}$$

De modo semelhante, encontramos

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, \qquad n \geq 1 \tag{3.18}$$

Fazendo $x = 0$ em 3.16 e lembrando que $F(0) = 0$, temos

$$A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \tag{3.19}$$

Com as equações 3.15, 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19 e alguns ajustes chegamos à expressão

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2}dt \ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x a_n \cos\frac{n\pi t}{L}dt \ + \int_0^x b_n \sin\frac{n\pi t}{L}dt\right) \quad (3.20)$$

Fazendo $x = a$ e $x = b$ e subtraindo um da outra obtemos a Eq. 3.10

■

3.3 Convergência Pontual e algumas desigualdades

Nesta seção apenas enunciaremos de modo informal alguns resultados importantes na análise de condições suficentes para uma função f convergir pontualmente. Também mostraremos algumas desigualdades de grande relevência não só na Análise de Fourier.

Teorema 3.3 *(Teste de Dini) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de período 2L, integrável e absolutamente integrável em $[-L, L]$. Fixado x, em $[-L, L]$, suponha que $f(x+0)$ e $f(x-0)$ existam e que exista $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^{\eta} \left|\frac{g(x,t)}{t}\right| dt < \infty$$

Então $e_n(x) \to 0$, ou seja, $s_n(x) \to [f(x+0) + f(x-0)]/2$, quando $n \to \infty$.

Obs. 3.2

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 \ + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} \ + \ b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right)$$

e

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Lema 3.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e absolutamente integrável em $[a, b]$. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(tx)dx = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(tx)dx = 0$$

Obs. 3.3 *O lema acima é usado na demonstração do Teste de Dini*

Desigualdade de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

1. para vetores do $\mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. para funções de quadrado integrável (f e $|f|^2$ são integráveis)

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Desigualdade de Minkowski

1. para vetores do $\mathbb{R}^n$

$$\left[\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}$$

2. para funções de quadrado integrável

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$

Identidade de Parseval

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx$$

3.4 Convergência Uniforme

Nesta seção veremos condições suficientes sobre a função f de período 2L que garantam a convergência de modo uniforme de sua série de Fourier.

Definição 3.7 *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de quadrado integrável se f e $|f|^2$ forem integráveis*

Teorema 3.4 *(1º Teorema sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier) Seja f uma função de período 2L, contínua e com derivada primeira de quadrado integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f.*

A idéia da demonstração é usar o teste M de Weierstrass (enunciado abaixo). Como

$$\left|a_n \cos \frac{n\pi x}{L}\right| \leq |a_n| \quad e \quad \left|b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right| \leq |b_n|$$

vê-se em que condições a série numérica converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

Proposição 3.6 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que $|u_n(x)| \leq M_n$, $\forall\ x \in I$, e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em I.*

Teorema 3.5 *(2º Teorema sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier) Seja f de período 2L, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira é de quadrado integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

Lema 3.2 *Seja ψ a função de período 2L assim definida:*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \frac{x}{L}) & -L \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{L}) & 0 < x \leq L \end{cases}$$

Então, a série de Fourier de ψ converge uniformemente para ψ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma 2Ln, para n inteiro.

A idéia da demonstração do teorema consiste é tomar a função contínua

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{k} \omega_j \psi(x - x_j)$$

onde k é o número de saltos de f e ω_j a medida desses saltos.

Aplicando o teorema 3.4, a série de Fourier de g converge uniformemente para g, em toda reta. Pelo lema 3.2, a série de Fourier de $\psi(x - x_j)$ converge uniformemente em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $x_j \pm 2Ln$. Como a série de Fourier de f é a soma das séries de g e $\omega_j \psi(x - x_j)$, para $j = 1, ..., k$, temos que ela converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma $x_j \pm 2Ln$, para $j = 1, ..., k$ e $n = 0, 1, 2, ...$, que são os pontos de descontinuidade de f.

3.5 Unicidade da série de Fourier

Com os resultados mostrados a seguir, conseguimos de modo simples obter o teorema que nos garante a unicidade da série de Fourier, ou seja, dadas duas funções com suas séries de Fourier iguais, temos que as funções são iguais em seus pontos de continuidade.

Teorema 3.6 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de período 2L, e de quadrado integrável em $[-L, L]$. Então a série de Fourier da f converge em média quadrática para f, ou seja, a seguinte relação é válida*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} |s_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

s_n é definido da forma vista na obs. 3.2

Definição 3.8 *Um conjunto $\{\psi_n\}$ de funções de quadrado integrável em $[-L, L]$ é chamado um sistema ortogonal, se*

$$\int_{-L}^{L} \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0 \ , \qquad se \quad n \neq m$$

$$\int_{-L}^{L} \psi_n^2(x)dx = c_n \neq 0$$

se $c_n = 1$, para todo n, o sistema recebe o nome de sistema ortonormal

Definição 3.9 *Um sistema ortonormal é dito completo se, para uma função f de quadrado integrável em $[-L, L]$, tivermos*

$$\int_{-L}^{L} f\psi_n = 0 \ , \qquad \forall n$$

então $f = 0$. Neste caso, quer dizer que $f(x) = 0$ em todos os pontos de continuidade da função f.

Teorema 3.7 *O sistema trigonométrico, definido da forma*

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{\pi x}{L}, ..., \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{k\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{k\pi x}{L}, ... \tag{3.21}$$

é completo

Agora podemos enunciar e demonstrar o teorema abaixo

Teorema 3.8 *(Unicidade da série de Fourier) Sejam f e g funções de período 2L e de quadrado integrável em $[-L, L]$. Suponha que suas séries de Fourier sejam as mesmas. Então $f = g$ (ou seja, f(x)=g(x) em todos os pontos de continuidade de f e g)*

Demonstração

Seja $h = f - g$. Como os coeficientes de Fourier de f e g são os mesmos, então $\int_{-L}^{L} h\psi_n = 0$, para todas as funções ψ_n do sistema trigonométrico 3.21. Pelo teorema 3.7, $h = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todos os pontos de continuidade de f e g.

■

3.6 Unicidade de solução para a equação linear do calor

Esta seção refere-se a um trabalho apresentado pelo orientando durante o XI ENIC - Encontro de Iniciação Científica da UFPB, realizado na cidade de João Pessoa nos dias 02, 03 e 04 de dezembro de 2003

Introdução

Consideremos uma barra de comprimento L, cuja secção transversal tem área A, feita de um material condutor uniforme de calor. Suponhamos que ela esteja isolada termicamente nas laterais, não permitindo a troca de calor com o meio ambiente, porém podem ocorrer tais transferências nas extremidades da barra.

O fato do material ser uniforme e a barra ser isolada termicamente nas laterais fazem com que o fluxo de calor se dê somente na direção longitudinal, passando o nosso problema para apenas uma dimensão.

Imaginemos que a barra, ao longo do seu comprimento, esteja colocada sobre o eixo x. Representemos por $u(x,t)$ a temperatura de um ponto de abcissa x no tempo t. A temperatura independe das coordenadas espaciais y e z, já que as várias grandezas físicas são constantes em cada secção tranversal, podendo variar de uma secção para outra.

Seja $\Re$ a região do plano (x,t) dada por $0 < x < L$ e $t > 0$ e $\overline{\Re}$ a união de $\Re$ com a fronteira, esta formada pelas semi-retas $\{x = 0, t > 0\}$ e $\{x = L, t > 0\}$ e pelo segmento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$. O problema da condução do calor consiste em determinar uma função $u(x,t)$ definida em $\overline{\Re}$ tal que:

$$\begin{aligned} u_t = K u_{xx}, &\qquad em \;\; \Re \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, &\qquad para \;\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x), &\qquad para \;\; 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

onde K é a constante de *difusibilidade térmica.*

O problema dado por estas três equações é chamado de *Problema de Valor Inicial e de Fronteira*, ou simplesmente PVIF.

Unicidade de Solução

Definição 3.10 *(Solução do PVIF no sentido I): Uma função* $u : \overline{\Re} \longrightarrow \Re$ *é uma solução do PVIF se ela for contínua em* $\overline{\Re}$*, tiver derivadas parciais* u_t *e* u_{xx} *em* $\Re$*, e satisfazer às relações abaixo*

$$\begin{aligned} u_t = K u_{xx}, &\qquad em \;\; \Re \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, &\qquad para \;\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x), &\qquad para \;\; 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

O objetivo deste trabalho é mostrar que dadas duas soluções (u_1 e u_2) do PVIF no sentido I elas são iguais.

Então $u = u_1 - u_2$ é contínua em $\overline{\Re}$ e

$$
\begin{gathered}
u_t = K u_{xx}, \qquad em \;\; \Re \\
u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad para \;\; t > 0 \\
u(x,0) = 0, \qquad para \;\; 0 \leq x \leq L
\end{gathered}
$$

E ao provarmos que $u \equiv 0$ temos a unicidade de solução do PVIF no sentido I. Para tal prova utilizaremos o seguinte Teorema conhecido como *Princípio do Máximo-Mínimo*.

Teorema 3.9 *(Princípio do Máximo-Mínimo) Seja u(x,t) uma função contínua no retângulo* $\overline{\Re}_{12} = \{(x,t) : x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$*, e tal que* $u_t = K u_{xx}$*, para* $x_1 < x < x_2$ *e* $t_1 < t < t_2$*. Então o máximo de u é assumido em um dos seguintes lados de* $\overline{\Re}_{12}$*:*

$$
\begin{gathered}
l_1 = \{x = x_1, t_1 \leq t \leq t_2\} \\
l_2 = \{t = t_1, x_1 \leq x \leq x_2\} \\
l_3 = \{x = x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}
\end{gathered}
$$

A função u é contínua no retângulo $\overline{\Re} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$, satisfaz a equação diferencial $u_t = K u_{xx}$ em $0 < x < L$ e $t > 0$. Portanto, u satisfaz as hipóteses do teorema 3.9, e conseqüentemente atinge o seu valor máximo em um dos lados de $\overline{\Re}$:

$$
\begin{gathered}
l_1 = \{x = 0, t \geq 0\} \\
l_2 = \{t = 0, 0 \leq x \leq L\} \\
l_3 = \{x = L, t \geq 0\}
\end{gathered}
$$

Sabemos que o valor de u em l_1, l_2 e l_3 é zero, não assumindo valores positivos. Se tomarmos a função $-u$, podemos aplicar novamente o teorema 3.9 e achamos o seu valor máximo que também será nulo. Porém, o máximo da função $-u$ é o mínimo da função u. Concluímos que $u \equiv 0$, provando a unicidade da solução.

■

Capítulo 4

O Grau Topológico de Brouwer

O grau topológico, $d(f, \Omega, y)$ de f com respeito a Ω e a y, é uma importante ferramenta de ajuda na resolução de problemas em que necessitamos encontrar e determinar a multiplicidade de solução de uma equação da forma $f(x) = y$, onde f é contínua definida em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^n$ e y é um ponto dado em $\mathbb{R}^n$.

A cada tripla (f, Ω, y) associamos um número inteiro $d(f, \Omega, y)$, de modo que as propriedade da função d nos permitam encontrar respostas quanto à existência, unicidade ou multiplicidade da solução da equação $f(x) = y$

Esta função d possui certas propriedades mostradas abaixo:

1. $d(id, \Omega, y) = 1$ para todo $y \in \Omega$

   o grau da função identidade é 1

2. $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ sempre que Ω_1 e Ω_2 sejam subconjuntos abertos e disjuntos de Ω, tais que $y \notin f(\overline{\Omega} \diagdown (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.

   o grau contém informações sobre a localização das soluções

3. $d(h(t, .), \Omega, y(t))$ independe de $t \in J = [0, 1]$ sempre que $h : J \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ e $y : J \to \mathbb{R}^n$ forem contínuas e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in J$.

   o grau é invariante por homotopia

Antes de iniciarmos o desenvolvimento do grau topológico de Brouwer mostraremos algumas noções de Análise no $\mathbb{R}^n$.

4.1 Tópicos de Análise no $\mathbb{R}^n$

Definição 4.1 *Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação*

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

tal que

1. $\|x\| \geq 0 \quad e \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definição 4.2 *Duas normas $\|.\|$; $|||.|||$ são ditas equivalentes, se existirem constantes $a, b \geq 0$ tal que $\|x\| \leq a|||x||| \leq b\|x\|$*

Definição 4.3 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ é dito um ponto interior de A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \subset A$*

Definição 4.4 *$A \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto, quanto $\mathring{A} = intA = A$, onde $\mathring{A} = \{x \in A : x$ é ponto interior$\}$*

Proposição 4.1

1. *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos*

2. *Se $A_1, ..., A_n$ são abertos, então $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é aberto*

3. *Se A_α são todos abertos, então $\bigcup_{\alpha \in I}$, onde I é uma família arbitrária, é aberto*

Proposição 4.2 *Todo subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como união enumerável de cubos fechados.*

Definição 4.5 *Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula (m(X)=0), quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter uma sequência de cubos m-dimensionais abertos $C_1, ..., C_i, ...$ tais que*

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} v(C_i) < \varepsilon$$

onde $v(C_i)$ é o volume do cubo C_i.

Proposição 4.3 *Toda reunião enumerável de conjuntos de medida nula é ainda um conjunto de medida nula.*

Diferenciabilidade no $\mathbb{R}^n$

Definição 4.6 *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável, no sentido de Fréchet, em $a \in \Omega$ se existe uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(a + v) = f(a) + Av + r(v), \qquad onde \quad \lim_{|v| \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

Neste caso, denotamos $A = f'(a)$

Definição 4.7 *Uma função* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é diferenciável, no sentido de Fréchet, em* $a \in \Omega$ *se existe uma aplicação linear* $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$f(a+v) = f(a) + T_a v + r(v), \qquad \text{onde} \quad \lim_{||v|| \to 0} \frac{||r(v)||}{||v||} = 0$$

Teorema 4.1 *(Teorema da Representação de Riesz) Dado* $f : H \to \mathbb{R}$ *linear. Se* $dim H < \infty$, *então existe um único* $u_0 \in H$ *tal que* $f(v) =< u_0, v >$

Definição 4.8 *Uma função* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é diferenciável, no sentido de Gateaux, em* $a \in \Omega$ *na direção* v *se existe*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

Proposição 4.4 *Uma função* $f = (f_1, ..., f_m)$ *é diferenciável em* $a \in \Omega$ *se, e somente se,* f_i *é diferenciável para* $i = 1, ..., m$

Obs. 4.1 *A transformação linear* $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *possui, em relação às bases canônicas de* $\mathbb{R}^m$ *e* $\mathbb{R}^n$, *uma matriz* $n \times m$ *chamada matriz jacobiana de* f *no ponto* a, *indicada por* $J_f(a)$. *De modo prático temos*

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$$

onde $f_1, ..., f_n$ *são as funções coordenadas de* f.

Teorema 4.2 *(Teorema da Função Inversa) Seja* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}^n$ *uma função de classe* C^1 *tal que* $det(J_f(a)) \neq 0$. *Então existe uma vizinhança* $V(a)$ *e* $W(f(a))$ *tal que*

$$f\Big|_{V(a)} : V(a) \to W(f(a))$$

é uma bijeção

Teorema 4.3 *(Teorema da Função Implícita) Seja* $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *com* F *de classe* C^1. *Suponha que* $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ *é invertível e* $F(a,b) = 0$. *Então, existe uma única* $\varphi : V(a) \to W(b)$ *de classe* C^1 *tal que* $\varphi(a) = b$ *e* $F(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall\ x \in V(a)$

4.2 Unicidade do Grau

Para fazermos um estudo da unicidade do grau topológico [1], vamos supor que ele exista (a garantia da existência ficará para um estudo mais a frente).

Enunciaremos alguns resultados que precisaremos para chegarmos à unicidade do grau topológico.

Proposição 4.5 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : A \to \mathbb{R}^n$ contínua. Então existe uma função contínua $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.*

Proposição 4.6

1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f \in C(A)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ em A.*

2. *Sejam $f \in \overline{C}^1$ e ε, $\delta > 0$ tais que*

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \quad \varrho(x, \partial\Omega) \geq \delta\} \neq \emptyset$$

Então existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|f - g|_\circ + \max_{\Omega_\delta} \; |f'(x) - g'(x)| \leq \varepsilon$$

Definição 4.9 *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x_0 \in \Omega$. Dizemos que x_0 é ponto crítico de f se $J_f(x_0) = 0$, caso contrário x_0 é ponto regular.*

Proposição 4.7 *Sejam $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Se y é um valor regular de f, então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.*

Proposição 4.8 *Sejam $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ tais que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Então existe $\alpha > 0$ tal que $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0)$ para todo $y \in B_\alpha(y_0)$*

Enunciaremos e demonstraremos um importante lema que nos garante a medida nula da imagem do conjunto dos pontos críticos de uma função de classe C^1

Lema 4.1 *(Lema de Sard) Seja $f \in C^1(\Omega)$ e S_f o conjunto dos pontos críticos de f. Então $f(S_f)$ tem medida nula.*

Demonstração

Usando as proposições 4.2 e 4.3, basta mostrarmos que, se $Q \subset \Omega$ é um cubo fechado, então $f(S_f(Q))$ tem medida nula.

[1] Neste capítulo não veremos o estudo completo sobre a unicidade, pois o mesmo ainda está em andamento

Suponha Q um cubo fechado de aresta l contido em Ω. Como Q é compacto e f' é contínua em Q, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in Q$ e f' é uniformemente contínua em Q. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f'(x) - f'(\overline{x})| < \varepsilon \quad \forall x, \overline{x} \in Q \;\; tais\ que\ |x - \overline{x}| < \delta_1$$

Também existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta = \frac{l\sqrt{n}}{m} < \delta_1$. Divimos o cubo Q em m^n cubos menores, cada um destes com aresta $\frac{l}{m}$ de modo que a união de cada subcubo Q_k seja igual a Q; a diagonal de Q_k é $\frac{l\sqrt{n}}{m}$, e então

$$|f'(x) - f'(\overline{x})| < \varepsilon \quad \forall x, \overline{x} \in Q_k$$

Definimos agora a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por

$$h(t) = f(\overline{x} + t(x - \overline{x}))$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)dt = \int_0^1 f'(\overline{x} + t(x - \overline{x}))(x - \overline{x})dt$$

Agora, observe que $h(1) - h(0) = f(x) - f(\overline{x})$ e $f'(\overline{x})(x - \overline{x}) = \int_0^1 f'(\overline{x})(x - \overline{x})dt$. Daí obtemos

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + R(x, \overline{x})$$

onde

$$R(x, \overline{x}) = \int_0^1 [f'(\overline{x} + t(x - \overline{x})) - f'(\overline{x})](x - \overline{x})dt \qquad \forall\ x, \overline{x} \in Q_k$$

Por um cálculo simples temos que $|R(x, \overline{x})| \leq \varepsilon\delta$

Agora, vamos supor $Q_k \cap S_f \neq \varnothing$. Tomando $\overline{x} \in Q_k \cap S_f$, definimos $A = f'(\overline{x})$, $\tilde{Q}_k = Q_k - \overline{x}$ e $g : \tilde{Q}_k \to \mathbb{R}^n$ por $g(y) = f(\overline{x} + y) - f(\overline{x})$. Como $|y| < \delta$ para todo $y \in \tilde{Q}_k$, $f(Q_k) = g(\tilde{Q}_k) + f(\overline{x})$ e que

$$g(y) = Ay + R(y), \quad com|R(y)| = |R(\overline{x} + y, \overline{x})| \leq \varepsilon\delta, \;\; \forall y \in \tilde{Q}_k$$

Como $\overline{x}$ é ponto crítico $\Rightarrow detA = 0$, logo o conjunto $A(\tilde{Q}_k$ está contido num subespaço de dimensão $n - 1$. Seja b_1 um vetor de norma 1 do complemento ortogonal de $A(\tilde{Q}_k)$. Completando b_1 a uma base ortonormal $\{b_1, ..., b_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ temos que $g(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle g(y), b_i \rangle b_i$, que é a expressão de $g(y)$ nessa nova base ortonormal.

As desigualdades abaixo são válidas:

1. $|\langle g(y), b_1 \rangle| \leq |R(y)||b_1| \leq \varepsilon\delta$
2. $|\langle g(y), b_i \rangle| \leq |\langle Ay, b_i \rangle| + |\langle R(y), b_i \rangle| \leq c\delta + \varepsilon\delta \quad para\ i \geq 2$

Podemos agora concluir que $g(\tilde{Q}_k)$ está contido num retângulo $\tilde{J}_k$ dado por

$$\tilde{J}_k = [-\varepsilon\delta, \varepsilon\delta] \times [-c\delta - \varepsilon\delta, c\delta + \varepsilon\delta] \times ... \times [-c\delta - \varepsilon\delta, c\delta + \varepsilon\delta]$$

cujo volume é $vol(\tilde{J}_k) = 2\varepsilon\delta[2\delta(c+\varepsilon)]^{n-1}$. Como $f(Q_k) = g(\tilde{Q}_k)+f(\overline{x})$ concluímos que $f(Q_k)$ está num retângulo J_k contendo $f(\overline{x})$ e cujo volume é o mesmo de $\tilde{J}_k$

Sabendo que $S_f(Q) \subset Q_1 \cup ... \cup Q_{m^n}$, podemos afirmar que o conjunto dos retângulos J_k definidos acima cobre $f(S_f(Q))$ e

$$\sum_{k=1}^{m^n} vol(J_k) = 2^n\varepsilon\delta^n m^n(c+\varepsilon)^{n-1} = 2^n\varepsilon(l\sqrt{n})^m(c+\varepsilon)^{n-1}$$

E assim, $f(S_f(Q))$ tem medida nula, pois ε é arbitrário.

∎

Este lema e a prop. 4.7 nos permite concluir que ao calcularmos $d(f, \Omega, y)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que y é um valor regular de f.

Como o estudo sobre o grau topológico não está concluido, ainda ficam faltando alguns resultados que nos permitem assegurar unicidade do grau.

Conclusão

Conforme pode ser observado, a metodologia adotada no projeto foi eficaz, visto que o conteúdo do mesmo, apesar de vasto, foi praticamente cumprido.

Esta atividade de iniciação à pesquisa somente nos trouxe benefícios, adquirimos uma maior indepêndencia no processo de aprendizagem e tivemos ainda a oportunidade de desenvolver atividades em paralelo ao estabelecido no projeto em si como estudos em grupos, estudos dirigidos, participações em ciclos de palestras, às quais estimularam e desenvolveram a nossa formação no âmbito acadêmico.

Aproveitamos a oportunidade para externar nossos agradecimentos pela promoção financeira do CNPq, que nos concedeu uma bolsa de iniciação do Instituto do Milênio - AGIMB.

Rodrigo Alves de Oliveira Arruda
orientando

João Marcos Bezerra do Ó
orientador

Referências Bibliográficas

[1] L. Bers, F. John and M. Schechter, *Partial Differential Equations*, Intercience John Wiley & Sons, 1966.

[2] Haim Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson Paris, 1987

[3] Djairo de Figueiredo, *Teoria Clássica do Potencial*, Editora Universidade de Brasília

[4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second edition, Springer-Verlag, 1983.

[5] Antonio Giglioli, *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, Notas do 10° Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas 7/26 Julho 1975

[6] M. Renardy and R. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag,1993.

[7] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, USA 1978.

[8] Boyce, William E. e Diprima, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Guanabara Dois, 1979

[9] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, IMPA, 2003

[10] Lima, Elon Lages, *Curso de Análise Vol. 1*, IMPA, 2002

[11] Lima, Elon Lages, *Curso de Análise Vol. 2*, IMPA, 1981

[12] *O Grau Topológico de Brouwer*, Trabalhos de Graduação em Matemática n.º 1/97, UnB, 1997