UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DO PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE

RELATÓRIO FINAL

Ícaro Lins Leitão da Cunha
BOLSISTA PELO PROGRAMA INICIAÇÃO CIENTÍFICA MILÊNIO

Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa Vera
ORIENTADOR

João Pessoa, 24 de março de 2004

Sumário

Relatório Final de Atividades

INTRODUÇÃO

Aqui apresentaremos as atividades desenvolvidas pelo bolsista de Iniciação Científica do Milênio ligado ao grupo "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise" da UFPB coordenado pelo professor João Marcos Bezerra do Ó e orientado pelo professor Pedro Hinojosa. O período é o primeiro semestre de 2004, e nesta apresentação além dos aspectos técnicos estudados expressaremos os objetivos atingidos, a metodologia e a bibliografia.

O "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise" estabelece algumas atividades complementares para os bolsistas ligados a ele, além das convencionais requeridas pela Iniciação Científica. A seguir listamos algumas destas atividades que desenvolvemos neste período e que consideramos de grande valor para a nossa formação .

1. Participamos como palestrante do primeiro encontro envolvendo todos os integrantes do grupo que forma o "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise" na primeira semana de fevereiro de 2003 ainda como voluntário;

2. Participamos como palestrante do encontro envolvendo todos os integrantes do grupo que forma o "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise" na primeira semana de outubro de 2003 proferindo a palestra de título "Introdução à o Operador de Laplaciano";

3. Participamos como expositor de painel do XI Encontro de Iniciação Científica da UFPB realizado na primeira semana de dezembro de 2003 exibindo um painel com o ttulo "Represetação de Green para o Problema de Dirichlet".

4. Participamos do "III Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional" realizado na UFPB pelo Departamento de Matemática;

5. Estudos semanais com o subgrupo formado por Ícaro L. Leitão da Cunha, Rodrigo A. de Oliveira Arruda e Simeão Targino da Silva, e coordenado pelos professores Everaldo Souto de Medeiros e Gilmar Otávio Correia.

OBJETIVO

Durante o percorrer do projeto cuidamos de nos embasar com alguns estudos iniciais de Equações Diferenciais Elípticas para podermos compreender e desenvolver estudos mais profundos que requer o projeto. Essas atividades foram vistas na seguinte cronologia: Alguns resultados de Cálculo Avançado, Funções Harmônicas e suas Propriedades, Solução Fundamental para a Equação de Laplace, Problema de Dirichlet e Representação de Green. Em suma o objetivo era desenvolver um estudo preliminar para que com destreza possamos cumprir o plano proposto.

Ainda salientamos que, como fazemos parte do "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise ", muito destes estudos foram desenvolvidos em grupos, com colegas que também fazem Iniciação Científica e pertencem ao projeto de pesquisa supra citado. Esta prática foi bastante favorável para nós, reduziu o tempo de compreensão dos textos estudados e fez avançarmos de forma desejável.

METODOLOGIA UTILIZADA

A metodologia utilizada foi a tradicional aplicada nas iniciações científicas da área da matemática que tem tido sucesso ao longo dos anos, isto é:

- Leitura criteriosa de texto da bibliografia;
- Resolução de lista de exercício para a fixação dos conceitos e compreensão dos resultados; e
- Apresentação semanais dos textos ao orientador.

Capítulo 1

Equações Diferencias

1.1 Conceitos Gerais

Muitos problemas, quando formulados matematicamente, requerem a determinação de uma função que satisfaça uma equação contendo derivadas da função incógnita. Tais equações são denominadas equações diferenciais. Quando a função incógnita depende de uma variável independete, teremos apenas derivadas ordinárias presentes, então a equação diferencial é dita Equação Diferencial Ordinária; quando a função incógnita depender de várias variáveis indepentes teremos derivadas parciais e a equação é chamada uma Equação Diferencial Parcial.

A ordem de uma equação diferencial ordinária é a da derivada de maior ordem contida na equação . Assim, a equação

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}]$$

(Lei de Newton), é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, e a equação

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t)$$

é uma equação diferencial de primeira ordem.

Generalizando

$$F[x, u(x), u'(x), ..., u^{(n)}(x)] = 0$$

é uma equação diferencial ordinária de ordem n.

As equações diferenciais ordinárias tem uma classificação utilizando-se o fato delas serem lineares ou não -lineares.

A equação diferencial $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ é dita linear se F é uma função linear das variáveis $y, y', ..., y^{(n)}$. Deste modo, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é

$$a_o(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = g(x)$$

Uma equação que não tem essa forma é uma equação não linear.

Exemplo 1.1. *(i)a equação de potencial*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

é linear.

(ii)$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$ *é não -linear.*

obs.: o ex. (ii) é não -linear em virtude do termo yy'.

1.2 Equações Ordinárias de Primeira Ordem

Teorema 1.2.1 (Existênia e Unicidade). *Sejam as funções f e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *contínuas em algum retângulo* $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$ *contendo o ponto* (x_o, y_o). *Então, em algum intervalo* $x_o - h < x < x_o + h$ *contido em* $\alpha < x < \beta$, *existe uma única solução* $y = \phi(x)$ *do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1a) \\ y(x_o) = y_o. & (1b) \end{cases}$$

Para provar este teorema, primeiramente, notamos que é suficiente considerar o problema em que o ponto inicial (x_o, y_o) é a origem; isto é, o problema,

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Se for dado algum outro ponto inicial, poderemos sempre fazer uma mudaça preliminar de variáveis, correspondendo a uma translação do eixo de coordenadas, que levará o ponto dado (x_o, y_o) à origem. Especialmente, introduzimos novas variáveis dependentes e independentes, ω e s, respectivamente, definidas pelas equações

$$\begin{cases} \omega &= y - y_o \\ s &= x - x_o. \end{cases} \qquad (3)$$

Se pensarmos em ω como uma função de s, teremos, pela regra de cadeia,

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}(y - y_o)\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx}.$$

Denotando $f(x, y) = f(s + x_o, \omega + y_o)$ por $F(s, w)$, o problema de valor inicial (1) converte-se em

$$\begin{cases} \omega\prime(s) = F[s, \omega(s)], & (4a) \\ \omega(0) = 0. & (4b) \end{cases}$$

As equações (2) e equações (4) são as mesmas. Daqui em diante, consideremos o problema (2), ligeiramente mais simples, preferencialmennnte ao problema original (1).

O teorema de existência e unicidade pode agora ser enunciado na forma seguinte.

Teorema 1.2.2. *Se f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas num retângulo $\boldsymbol{R} : |x| \leq a$, $|y| \leq b$, então, am algum intervalo $|x| \leq h \leq a$, existe uma solução única $y = \phi(x)$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y\prime &= f(x, y) \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.2. *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y\prime = 2x(1 + y), \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Para resolver este problema pelo método de aproximações sucessivas, observamos primeiramente que se $y = \phi(x)$, então a equação integral correspondente é

$$\phi(x) = \int_0^x 2t[1+\phi(t)]dt. \qquad (6)$$

Se a aproximação inicial é $\phi_0(x) = 0$, temos que

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t[1+\phi_0(t)]dt = x^2. \qquad (7)$$

Analogamente,

$$\phi_2(x) = \int_0^x 2t[1+\phi_1(t)]dt = x^2 + \frac{x^4}{2}, \qquad (8)$$

e

$$\phi_3(x) = \int_0^x 2t[1+\phi_2(t)]dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2.3}. \qquad (9)$$

As eqs.(7), (8) e (9) sugerem que

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}. \qquad (10)$$

para cada $n \geq 1$.

É evidente, Eq.(10), que $\phi_n(x)$ é a n-ésima soma parcial da série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}; \qquad (11)$$

assim, $\lim_{x\to\infty} \phi_n(x)$ existe se, e somente se, a série (11) converge. Aplicando o teste da razão, vemos que, para cada x,

$$\left| \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!} \frac{k!}{x^{2k}} \right| = \frac{x^2}{k+1} \to \infty;$$

portanto a série (11) converge para todo x, e sua soma $\phi(x)$ é o limite da sequência $\phi_n(x)$. Mais ainda, como a série (11) é a série de Taylor podemos diferenciá-la e integrá-la termo a termo. Podemos, portanto, verificar por cálculo direto que $\phi(x)\sum_{k=1}^{n} = x^{2k}/k!$ é uma solução da equação (6). Alternativamente, podemos verificar que esta função também satisfaz o problema de valor inicial, substituindo y por $\phi(x)$ na equação (5).

Finalmente, para tratarmos da questão de unicidade, suponhamos que o problema de valor inicial tenha outra solução ψ, diferente de ϕ. Mostreremos que isto leva a uma contradição. Como ϕ e ψ satisfazem a equação integral (6), temos por subtração que

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x 2t[\phi(x) - \psi(x)]dt$$

Tomando valores absolutos de ambos os membros, temos que, se $x > 0$

$$|\phi(x) - \psi(x)| = \int_0^x 2t|\phi(x) - \psi(x)|dt$$

para $0 \leq x \leq \frac{A}{2}$, onde A é arbitrário, então $2t \leq A$, e

$$|\phi(x) - \psi(x)| = \int_0^x A|\phi(x) - \psi(x)|dt. \qquad (12)$$

É conviniente, neste ponto, introduzir a função U definida por

$$U(x) = \int_0^x A|\phi(x) - \psi(x)|dt. \qquad (13)$$

Vê-se então imediatamente que

$$\begin{cases} U(0) = 0, & (14) \\ U(x) \leq 0, \quad para \quad x \leq 0. & (15) \end{cases}$$

Além disso, U é diferenciável, e $U'(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$. Assim, pela Eq.(12),

$$U'(x) - AU(x) \leq 0. \qquad (16)$$

Multiplicando a equação (16) pela quantidade positiva e^{-Ax}, temos

$$[e^{-Ax}U(x)]' \leq 0. \qquad (17)$$

Então, integrando a equação (17) de zero a x e utilizando a equação (14), obtemos

$$e^{-Ax}U(x) \leq 0 \quad para \quad x \geq 0$$

Logo, $U(x) \leq 0$ para $x \geq 0$ e juntamente com a equação (15), isto requer que $U(x) = 0$ para cada $x \geq 0$. Assim, $U'(x) \equiv 0$, e portanto, $\psi \equiv \phi$, o que contradiz a hipótese original. Consequentemente, não pode haver duas soluções diferentes do problema de valor inicial para $x \geq 0$. Uma pequena modificação deste argumento leva à mesma conclusão para $x \leq 0$.

Capítulo 2

Preliminares

O propósito deste capítulo é apresentar algumas definições, ferramentas e resultados que serão utilizados no próximo capítulo.

2.1 Notações e definições

Trabalharemos em $\mathbb{R}^n$, e n sempre representará a sua dimensão. Pontos em $\mathbb{R}^n$ serão denotamos por x, y, ξ, η; as coordenadas de x são $(x_1, ..., x_n)$.

Se U é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\overline{U}$ denotará seu fecho e ∂U sua bordo. A palavra domínio representará um conjuto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, não necessariamente conexo, de tal modo que $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^n - \overline{\Omega})$, isso é Ω não tem pontos no interior da froteira.

Se x e y são pontos em $\mathbb{R}^n$, faremos

$$x.y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

e $|x| = (x.x)^{\frac{1}{2}}$. Usamos a seguinte notação para esferas e bolas (abertas): se $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$,

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\}, \quad B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

Seja $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n)$ uma n-upla de inteiros não negativos. Chamamos α um multiindice. Definimos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad \alpha! = \alpha_1!, ..., \alpha_n!$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$, faremos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

Normalmente usaremos a notação

$$\partial_j = \partial / \partial_{xj}$$

para derivadas em $\mathbb{R}^n$. Derivadas de alta ordem são expressadas por multiindices:

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial_{x2}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial_{xn}}.$$

Note que em particular se $\alpha = 0$, ∂^α é o operador identidade. Denota-se, então , ∂u como o n-upla das funções $(\partial_1 u, ..., \partial_n u)$ quando u é diferenciável; porém, usaremos uma notação mais comum

$$\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_n u)$$

Exemplo 2.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2$

$\nabla f = (6x)$

Exemplo 2.2. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g(x, y) = x^2 - y^2$

$\nabla g = (2x, -2y)$

Se $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ é um n-tuplo de funções contínuas no conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$, e u é diferenciável, definimos a derivada direcional $\partial_\mu u$ em V por

$$\partial_\mu u = \mu(x).\nabla u(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x) \partial_j u(x).$$

2.2 Resultados de Cáculo Avançado

Um subconjuto S em $\mathbb{R}^n$ é chamado de hipersuperfície *de classe* C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ se para todo $x_0 \in S$ existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_0 e uma função real $\phi \in C^k(V)$ de tal modo que $\nabla\phi$ seja não nulo em $S \cap V$ e

$$S \cap V = \{x \in V : \phi(x) = 0\}.$$

Neste caso , pelo teorema da função implicíta podemos resolver a equação $\phi(x) = 0$ perto de x_0 para algumas coordenadas x_i, obtendo

$$x_i = \psi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

para alguma função de classe C^K em ψ. Uma vizinhança de x_0 em S pode então ser mapeado num pedaço do hiperplano $x_n = 0$ pela transformação C^k

$$x \to (x', x_i - \psi(x')) \quad (x' = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)).$$

Esta mesma vizinhança pode também ser representada na forma paramétrica como a imagem de um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n-1}$ (com coordenadas x') no vetor

$$x' \to (x_1, ..., x_{i-1}, \psi(x'), x_{i+1}, ..., x_n)$$

x' pode ser pensado como estar dando coordenadas locais perto de x_0 em S.

Uma consideração similar se aplica se "C^k" é substituido por "analítico".

Com S, V, ϕ como acima, o vetor $\nabla\phi(x)$ é perpendicular ao subconjunto S em x para todo $x \in S \cap V$. Devemos sempre supor que S é orientado, isto é, que fizemos uma escolha de um vetor unitário $\nu(x)$ para cada $x \in S$, variando continuamente com x, que é perpendicular à S em x. $\nu(x)$ será chamado de normal à S em x; claramente em $S \cap V$ temos

$$\nu(x) = \pm\nabla\phi(x)/|\nabla\phi(x)|.$$

Então ν é uma função C^{n-1} em S. Em particular, se S é fronteira de um domínio Ω, sempre escolheremos a orientação de tal modo que ν aponta para fora de Ω.

Se u é uma função diferenciável definida na vizinhança de S, podemos definir o vetor normal de u em S por

$$\partial_\nu u = \nu.\nabla u.$$

Agora calcularemos a derivada da normal em $S_r(y)$. Já que retas originadas do centro de uma esfera são perpendiculares à mesma, teremos

$$\nu(x) = (x-y)/r, \quad \partial_\nu = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)\partial_j \quad em \quad S_r(y)$$

A seguir darei uma proposição que será utilizada posteriormente:

Proposição 2.3. *Seja S uma hipersuperfície compacta e orientada de classe C^k, $k > 2$. Existe uma vizinhança V de S em $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ de tal modo que a função*

$$F : (x,t) \to x + t\nu(x)$$

é um homeomorfismo C^{k-1} de $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ dentro de V.

Demonstração : F é claramente C^{k-1}. E para cada $x \in S$ sua matriz jacobiana (com respeito às coordenadas locais em $S \times \mathbb{R}$) em $(x,0)$ é não singular já que ν é normal à S. Então pelo teorema da função inversa, F pode ser invertido em uma vizinhança W_x de cada $(x,0)$ para formar uma função de classe C^{k-1}

$$F_x^{-1} : W_x \to (S \cap W_x) \times (-\varepsilon(x), \varepsilon(x))$$

para algum $\varepsilon(x) > 0$. Como S é compacto, podemos escolher $x_1, ...x_n \in S$ de tal modo que W_{x_j} cobre S, e as funções $F_{x_j}^{-1}$ se juntam para formar um C^{k-1} que é o inverso de F apartir de uma vizinhança V de S para $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ onde $\varepsilon = min(\varepsilon(x_j))$.

A vizinhaça V na proposição (4.3) é chamada de vizinhança tubular de S. Será conviniente extender a definição da derivada da normal para vizinhança tubular. Se u é diferenciável em V, para $x \in S$ e $-\varepsilon < t < \varepsilon$ faremos

$$\partial_\nu u(x + t\nu(x)) = \nu(x).\nabla u(x + t\nu(x)).$$

Para nossos propósitos um campo vetorial será simplesmente uma função $\mathbb{R}^n$ em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ for um campo vetorial diferenciável em um conjuto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos seu divergente $div\mu$ em Ω como

$$div\mu = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \mu_j.$$

Nesta terminologia podemos citar a forma geral da fórmula de Stokes que precisaremos:

Teorema 2.2.1. *(Teorema da Divergência)*
Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio limitado cujo bordo $S = \partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves. Seja $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 em $\overline{\Omega}$. Ento

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla \cdot F dxdy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} ds,$$

onde $\hat{n}$ é a normal externa unitária.

Todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ pode ser escrito como $x = ry$ com $r > 0$ e $y \in S_1(0)$, $r = |x|$ e $y = x/|x|$. A fórmula $x = ry$ é uma representação por coordenadas polares de x. A medida de Lebesgue é dada em coordendas polares por

$$dx = r^{n-1} dr d\sigma(y)$$

$d\sigma$ medida da superfície em $S_1(0)$.

Exemplo 2.4. *Se $0 < a < b < \infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos:*

$$\begin{aligned}
\int_{a<|x|<b} |x|^\lambda dx &= \int_{S_1(0)} \int_a^b r^{n-1+\lambda} dr \\
&= \omega_n (n+\lambda)^{-1} (b^{n+\lambda} - a^{n+\lambda}) \qquad se\ \lambda \neq -n, \\
&= \omega_n log(b/a) \qquad se\ \lambda \neq -n,
\end{aligned}$$

onde ω_n é a de $S_1(0)$ (que ser calculado depois). Como consequência imediata, temos:

Proposição 2.5. *A função $x \to |x|^\lambda$ é integrável numa vizinhança de* 0 *se, e somente se,* $\lambda > -n$ *e integrável fora de uma vizinhança de* 0 *se, e somente se,* $\lambda < -n$.

Como outra aplicação de coordenadas polares, podemos calcular a integral:

Proposição 2.6. $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = 1$.

Demonstração : Seja $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx$. J que

$$\exp(-\pi|x|^2) = \exp(-\pi \sum_1^n x_j^2) = \Pi_1^n \exp(-\pi x_j^2)$$

O teorema de Fubini mostra que $I_n = (I_1)^n$, ou o seu equivalente $I_n = (I_2)^{n/2}$. Mas em coordenadas polares,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^\infty r e^{-\pi r^2} dr \\ &= \pi \int_0^\infty e^{-\pi s} \pi ds = \pi/\pi = 1. \quad \square \end{aligned}$$

A prova confere pois sabemos que a área de $S_1(0)$ em $\mathbb{R}^2$ é 2π. Se invertermos estes cálculos poderemos calcular ω_n de $S_1(0)$ em $\mathbb{R}^n$ para qualquer n. Sabemos que a função Gama $\Gamma(s)$ é definida, para $s > 0$ por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Facilmente verificamos que:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

(A última fórmula se reduz à proposição anterior através de uma troca de variáveis.)

Então , para $k \in_+$,

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

$$\Gamma(k/2) = (\frac{k-1}{2})(\frac{k-3}{2})...(\frac{1}{2})\sqrt{\pi} \qquad \text{k for ímpar}$$

Proposição 2.7. *A área de $S_1(0)$ em $\mathbb{R}^n$ é dada por*
$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Demonstração : Integrando $e^{-\pi|x|^2}$ por coordenadas polares e a substituindo $s = \pi r^2$ teremos

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = \int_{S_1(0)} \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2} r^{n-1} dr d\sigma \\ &= \omega_n \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2} r^{n-1} dr = (\frac{\omega_n}{2\pi^{n/2}}) \int_0^\infty e^{-s} s^{(n/2)-1} ds \\ &= \omega_n \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \end{aligned}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Corolário 2.8. *O volume de $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^n$ é $\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$*

Demonstração : Como $\int_{B_1(0)} dx$ o volume de $B_1(0)$, teremos:

$$\int_{B_1(0)} dx = \omega_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n}.$$

□

Corolário 2.9. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a área de $S_r(x)$ é $r^{n-1}\omega_n$, e o volume de $B_r(x)$ é $r^n \frac{\omega_n}{n}$.*

Capítulo 3

Operador Laplaciano

3.1 Introdução

Um dos mais importantes operadores diferenciais em matemática é o Laplaciano, Δ. Em $\mathbb{R}^n$ este operador é definido por:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 = div \nabla$$

Exemplo 3.1. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = 3x^2$, *então* $\Delta f = 6$. *De fato,*

$$\nabla f = (6x) \ e$$

$$\Delta f = div \nabla f = div\, 6x = \frac{\partial}{\partial x} 6x = 6.$$

Exemplo 3.2. *Seja* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *definida por* $g(x, y) = x^2 - y^2$, *então* $\Delta g = 0$. *De fato,*

$$\nabla g = (2x, -2y) \ e$$

$$\begin{aligned} \Delta g &= div \nabla g = div\,(2x, -2y) = \sum_{i=1}^{2} \partial_i(g_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2} g_{ii} = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

3.2 Propriedades Básicas de Funções Harmônicas

Uma função u que é C^2 num subespaço aberto $\mathbb{R}^n$ é definida como uma função harmônica se $\Delta u = 0$.

Exemplo 3.3. *Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ é definida como uma função harmônica pois $\triangle h = 0$. De fato,*

$$\nabla h = (2x, -4y, 2z)e$$

$$\begin{aligned}\Delta h &= div \nabla h = div(2x, -4y, 2z) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \partial_i(h_i) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} \\ &= 2 - 4 + 2 = 0\end{aligned}$$

Exemplo 3.4. *Seja $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|$*

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$
$\partial_1 |x| = \frac{\partial}{\partial x_1} |x| = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}} = \frac{x_1}{|x|}$

$\frac{\partial}{\partial x_j} |x| = \frac{x_j}{|x|}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} |x| = \frac{|x| - \frac{x_j}{|x|} x_j}{|x|^2} = \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3}$$

$\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{1}{2} \frac{1}{|x|} \frac{x_j}{|x|} = \frac{x_j}{2\pi |x|^2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f = \frac{2\pi |x|^2 - 2\pi 2|x| \frac{x_j}{|x|} x_j}{4\pi |x|^4} = \frac{1}{2\pi |x|^2} - \frac{x_j^2}{\pi |x|^4}$$

então

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f = \frac{1}{\pi|x|^2} - \frac{\sum x_j^2}{\pi|x|^4}$$
$$\Delta f = \frac{1}{\pi|x|^2} - \frac{|x|^2}{\pi|x|^4} = 0$$

A seguir teremos Ω como o domínio em $\mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega$ como sua fronteira suave, $d\sigma$ denotará a medida da superfície, e ν o vetor normal apontando para fora da região .

Teorema 3.2.1. *(Teorema de Green) Se Ω é limitado e u, v são funções C^2 em Ω, então*

$$\int_S v\partial_\nu u d\sigma = \int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \nabla v) dx$$

e

$$\int_S (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) d\sigma = \int_\Omega (v\Delta u + u\Delta v) dx$$

Demonstração : Para se chegar na primeira equação é só usar a aplicação do teorema de divergência (4.2.1) no campo vetorial $v\nabla u$. A segunda segue a primeira quando trocar u por v para se obter outra equação e depois subtrair as duas:

$$\int_S v\partial_\nu u d\sigma - \int_S u\partial_\nu v d\sigma = \int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \nabla v) dx - \int_\Omega (u\Delta v + \nabla v \nabla u) dx. \square$$

Corolário 3.5. *Se u é harmônica em Ω, então*

$$\int_S \partial_\nu u d\sigma = 0.$$

Demonstração : Faça $v = 1$:

$\int_S 1\partial_\nu u d\sigma = \int_\Omega (1\Delta u + \nabla u \nabla 1) dx$
$\int_S \partial_\nu u d\sigma = \int_\Omega (\Delta u + 0) dx = 0$ $\square$

O Teorema a seguir demonstra que o valor de uma função harmônica (num x fixo) u é igual ao seu valor médio numa esfera que contorna x. Recodamos que $W_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.2. *(Teorema do Valor Médio) Suponha u é harmônica em Ω. Se $x \in \Omega$ e $r > 0$ é pequeno suficiente para que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, então*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}W_n} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{W_n} \int_{S_1(0)} u(x + ry) d\sigma(y)$$

Demonstração : Usando o teorema de Green obteremos a 1^a igualdade. Sendo u harmônica, v definida por $v(y) = |x - y|^{2-n}$ se $n > 2$ ou $v(y) = -log|x - y|$ se $n = 2$, e o domínio será $B_r(x) - B_\varepsilon(x)$ onde $0 < \varepsilon < r$. Já se foi verificado que v é harmônica em $\mathbb{R}^n - \{x\}$, e (pelo valor obtido pelo calculo da derivada da normal em $S_r(y)$) que $\partial_\nu v$ é a constate $(2 - n)r^{1-n}$ em $S_r(x)$ e $-(2 - n)\varepsilon^{1-n}$ em $S_\varepsilon(x)$. Por isso

$$0 = \int_{S_r(x)} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) d\sigma + \int_{S_\varepsilon(x)} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) d\sigma$$

$$0 = r^{2-n} \int_{S_r(x)} \partial_\nu u d\sigma + \varepsilon^{2-n} \int_{S_\varepsilon(x)} \partial_\nu u d\sigma$$

$$+(2 - n)r^{1-n} \int_{S_r(x)} u d\sigma - (2 - n)\varepsilon^{1-n} \int_{S_\varepsilon(x)} u d\sigma$$

Pelo Colorário 5.5 acima:

$$\frac{1}{r^{1-n}\omega_n} \int_{S_r(x)} u d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^{1-n}\omega_n} \int_{S_\varepsilon(x)} u d\sigma$$

Como u é contínua então o valor do lado direito converge para $u(x)$ quando $\varepsilon \to 0$. Provando assim a primeira igualdade.

A 2^a igualdade vem da troca de variáveis $y \to x + ry$. □

Corolário 3.6. *Se u, Ω e r são como acima. Então*

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + ry) dy.$$

Demonstração : Para chegar a prova, é só multiplicar ambos lados de

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + \rho ry) d\sigma(y)$$

por $\rho^{n-1}d\rho$ e integrar de 0 a 1. $\square$

Teorema 3.2.3. *(Recíproca do Teorema do Valor Médio) Suponha u é contínua em* Ω *e* $\forall x \in \Omega$ *e* $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ *teremos*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x+ry)d\sigma(y).$$

Então $u \in C^\infty(\Omega)$ *e u é harmônica em* Ω.

Demonstração : Escolha $\phi \in C_0^\infty(B_1(o))$ tal que $\int \phi = 1$ e $\phi(x) = \psi(|x|)$ para algum $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon)$, e $\Omega_\varepsilon = \{x : \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega\}$. Então se $x \in \Omega_\varepsilon$, a função $y \to \phi_\varepsilon(x-y)$ é definida em Ω e teremos:

$$\int u(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = \int u(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy = \int_{|y|<\varepsilon} u(x-y)\varepsilon^{-n}\phi(y/\varepsilon)dy$$

$$= \int_{|y|<1} u(x-\varepsilon y)\phi(y)dy = \int_0^1 \int_{S_1(0)} u(x-\varepsilon ry)d\sigma(y)\psi(r)r^{n-1}dr$$

$$= \omega_n u(x)\int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr = u(x)\int_0^1 \int_{S_1(0)} \phi(ry)d\sigma(y)r^{n-1}dr$$

$$= u(x)\int \phi(y)dy = u(x)$$

No primeiro membro desta cadeia de igualdades podemos claramente diferenciar a integral o quanto quisermos, já que $\phi \in C_0^\infty$.

Isso implica que $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, como ε é arbitrário, $u \in C^\infty(\Omega)$.

Finalmente, $\forall x \in \Omega$ e $r > 0$ suficientemente pequeno, pelo teorema de Green, teremos

$$\int_{B_r(x)} \triangle u = \int_{S_r(x)} \partial_\upsilon u d\sigma = \frac{d}{d\rho}\int_{S_1(0)} r^{n-1}u(x+\rho y)d\sigma(y)|_{\rho=r}$$

$$= r^{n-1}\omega_n \frac{d}{d\rho} u(x) = 0.$$

Portanto $\Delta u = 0$ em Ω. $\square$

Corolário 3.7. *Se u é harmônica em Ω então $u \in C^{\infty}(\Omega)$.*

Corolário 3.8. *Se $\{u_k\}$ é uma sequencia de funções harmônicas em Ω que converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω até um limite u, então u é harmônica em Ω.*

Para provar os dois corolários acima, u tem que satisfazer a recíproca do teorema do valor médio.

Teorema 3.2.4. *(Princípio do Máximo) Suponha Ω é conexa. Se u é harmônico e real em Ω e $sup_{\Omega} u(x) = A < \infty$, então ou $u(x) < A$ $\forall x \in \Omega$, ou $u(x) = A$ $\forall x \in \Omega$.*

Demonstração : É claro que $\{x \in \Omega : u(x) = A$ é fechado em Ω. Mas pelo corolário 2.6, se $u(x) = A$ então $u(y) = A$ $\forall y$ numa esfera ao redor de x, então o conjunto também é aberto. Ento, se um conjuto conexo é aberto e fechado ao mesmo tempo, ou ele é um todo, ou ele é um vazio. $\square$

Corolário 3.9. *Sejam Ω uma região limitada e $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Se u é harmônica e real em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$, então o valor máximo de u em $\overline{\Omega}$ é obtido em $\partial\Omega$.*

Demonstração : O máximo é atingido em algum lugar; se em um ponto interior, u é constante em uma componente conexa que contém este ponto, então o Máximo é também atingido no bordo. $\square$

Teorema 3.2.5. *(Teorema de Unicidade) Suponha $\overline{\Omega}$ é compacto. Se u_1 e u_2 são funções harmônicas em Ω, contínuas em $\overline{\Omega}$ e $u_1 = u_2$ em $\partial\Omega$, então $u_1 = u_2$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração : As partes reais e imaginárias de $u_1 - u_2$ e $u_2 - u_1$ são harmônicas em Ω, então devem atingir suas máximas em $\partial\Omega$. $\square$

Teorema 3.2.6. *(Teorema de Liouville) Se u é limitada e harmônica em $\mathbb{R}^n$, então u é constante.*

Demonstração : Pelo colorário 2.6, para cada $R > 0$ e cada $x \in \mathbb{R}^n$ teremos:

$$
\begin{aligned}
|u(x) - u(0)| &= \frac{n}{R^n\omega_n}\left|\int_{B_r(x)} u(y)dy - \int_{B_r(0)} u(y)dy\right| \\
&\leq \frac{n}{R^n\omega_n}\|u\|_\infty\left[\int_{|y|<R,|x-y|>R} dy + \int_{|y|>R,|x-y|<R} u(y)dy\right] \\
&\leq \frac{n}{R^n\omega_n}\|u\|_\infty \int_{R-|x|<|y|<R+|x|} dy \\
&= \frac{n}{R^n}\|u\|_\infty \int_{R-|x|}^{R+|x|} r^{n-1}dr \\
&= \frac{1}{R^n}[(R+|x|)^n - (R-|x|)^n] \\
&= 0(R^{-1}).
\end{aligned}
$$

Fazendo $R \to 0$, veremos que $u(x) = u(0)$. $\square$

Capítulo 4

Representação de Green para o Problema de Dirichlet

Neste capítulo apresentaremos a Representação de Green para o Problema de Dirichlet, esta possibilita uma representação mais simples para a solução do Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace.

4.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e sejam f, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 em $\overline{\Omega}$.

O Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace é:

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos pelo Princípio do Máximo, que tal problema, se tem solução , ele é único. Agora queremos determinar uma solução para este problema.

A partir do conhecimento da solução fundamental do laplaciano, determinamos uma função de Green, e esta nos permitirá representar a solução do problema acima através de uma fórmula integral. Esta fórmula integral é conhecida como representação de Green.

A solução fundamental do laplaciano é a função $\Gamma(x-y)$ (para um y fixo em Ω) que é da seguinte forma:

$$\Gamma(x-y)=\Gamma(|x-y|)=\begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n} \ , \ n>2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y| \ , \ n=2, \end{cases}$$

esta função nos possibilita determinar a função de Green. A função de Green é uma função $G=G(x,y)$ definida em $\Omega\times\overline{\Omega}$. Para cada $x\in\Omega$, $G(x,\cdot)-\Gamma(x,\cdot)$ é uma função harmônica em $\overline{\Omega}$. Esta função é única pois, para cada $x\in\Omega$, $G(x,\cdot)-\Gamma(x,\cdot)$ é a única solução para o Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace.

A seguir passaremos à parte técnica para encontrar a Representção de Green para o Problema de Dirichlet.

4.2 Cálculo da Representação de Green

Como consequência do teorema de divergência, obtemos as identidades de Green. Seja Ω domínio onde vale o teorema de divergência, e sejam u e v funções de classe $C^2(\overline{\Omega})$. Fazemos $W=vDu$ em $\int_{\Omega_0} divW dx=\int_{\partial\Omega_0}$ para obter a primeira identidade:

$$\int_\Omega v\Delta u dx+\int_\Omega DuDv dx=\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial\nu}ds.$$

E obtemos a segunda pela troca interna entre u e v e depois subtraindo:

$$\int_\Omega (v\Delta u-u\Delta v)dx=\int_\Omega\Big(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\Big)ds.$$

Para irmos mais adiante tomemos a solução fundamental de Equação de Laplace que citamos anteriormente.

Por cálculos simples temos,

$$D_i\Gamma(x-y)=\frac{1}{n\omega_n}(x_i-y_i)|x-y|^{-n}$$

$$D_{ij}\Gamma(x-y)=\frac{1}{n\omega_n}\{|x-y|^2\delta_{ij}-n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\}|x-y|^{-n-2}.$$

A singularidade em $x = y$ nos impossibilita de usar Γ em vez v na segunda identidade. Uma maneira de ultrapassar isto é substituir Ω por $\Omega - \overline{B}_\rho$. Onde $B_\rho = B_\rho(y)$ para ρ suficientemente pequeno. Então , da segunda identidade, chegamos em

$$\int_\Omega \Gamma \Delta u dx = \int_\Omega \Big(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\Big) ds + \int_{B_\rho} \Big(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\Big) ds.$$

Agora

$$\int_{B_\rho} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \Gamma(\rho) \int_{B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \leq n\omega_n \rho^{n-1} \Gamma(\rho) \sup_{B\rho} |Du| \to 0 \text{ quando } \rho \to 0$$

e

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds &= -\Gamma'(\rho) \int_{B_\rho} u ds \ (\nu \text{ é normal externa de } \Omega - B_\rho\ ) \\ &= \frac{-1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{B_\rho} u ds \to -u(y) \text{ quando } \rho \to 0. \end{aligned}$$

Então fazendo $\rho \to 0$ chegaremos na fórmula de representação de Green.

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \Big(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) ds + \int_\Omega \Gamma(x-y) \Delta u dx \ , \ (y \in \Omega).$$

(4.1)

Sendo f uma função integrável, a integral $\int_\Omega \Gamma(x-y) f(x) dx$ é chamada de Potencial Newtoniana de densidade f. Se u tem suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, então

$$u(y) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(x) dx.$$

Para u harmônica, teremos:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \Big(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big) ds \qquad (y \in \Omega).$$

Agora suponhamos que $h \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz $\Delta h = 0$ em Ω. Então pela segunda identidade de Green, obtemos:

$$- \int_{\partial\Omega} \Big(u \frac{\partial h}{\partial \nu} - h \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big) ds = \int_{\Omega} h \Delta u dx.$$

(4.2)

Escrevendo $G = \Gamma + h$ e adicionando 4.1 e 4.2 obteremos uma forma mais geral da fórmula da representação de Green.

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \Big(u \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big) ds + \int_{\Omega} G \Delta u dx.$$

Se $G = 0$ em $\partial\Omega$, teremos:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \nu} ds + \int_{\Omega} G \Delta u dx.$$

INFORMAÇÕES ADICIONAIS

Conforme previsto no plano de trabalho, iniciaalmente estudou-se temas preparatórios para a aquisição de melhores informações visando a compreensão de novo conceitos da teoria das equações diferenciais parciais elípticas e das técnicas utilizadas por esta teoria.

APRECIAÇÕES FINAIS

O bolsista reconhece a importância que este programa ofereceu na sua formação acadêmica. Não só do ponto de vista científico e informativo mas sobretudo o desenvolvimento da capacidade de trabalho em equipe, da eficácia da disciplina e responsabilidade. Vale ainda salientar, que o estudo dirigido promovido pela Iniciação Científica é por demias benéfico para o aluno, pois proporciona um amadurecimento do conhecimento anteriormente adquirido e indica caminhos para a compreensão dos novos. Registramos aqui o nosso agradecimento ao nosso Orientador assim como ao IM-AGIMB que proporcionou o financiamento desta Bolsa.

Referências Bibliográficas

[1] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differencial Equations*, Princeton University Press (1976).

[2] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

orientador

bolsista

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Projeto de Pesquisa / Plano de Trabalho

Título

Uma Introdução ao Estudo do Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace

PIBIC - CNPq - UFPB - 2002

Identificação do Projeto

1. **Título do Projeto**
   Uma introdução ao estudo do Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace.

2. **Local de Execução**
   Departamento de Matemática - CCEN - UFPB

3. **Área de Pesquisa**
   Análise - Geometria Diferencial.

4. **Sub-Área de Pesquisa**
   Equações Diferenciais.

5. **Orientador**
   Professor Dr. Pedro A. Hinojosa Vera

6. **Co-Orientador**
   Professor Dr. Pedro A. Gomes Venegas

7. **Orientando**
   Ícaro Lins Leitão da Cunha

8. **Período de Realização**
   abril de 2003 a março de 2004.

Introdução

Integralização do Bolsista no “Projeto de Pesquisa Integrado em Análise”

O Projeto Integrado de Pesquisa em Análise vem desenvolvendo estudos na área de análise e especificamente em equações diferenciais. O grupo de pesquisa que compõe este projeto inclui alunos desde Iniciação científica até Doutorado e varios professores-pesquisadores do Departamento de Matemática. Equações diferenciais têm aplicações não só em Matemática, também em outras ciências como Biologia, Economia, Fisica, Engenharia, etc. e têm atraído um grande número de jovens talentosos que sentem-se maravilhados pela beleza das técnicas e métodos envolvidos no estudo e solução de certas equações diferenciais. O PIBIC exerce um papel importantíssimo na caça e descobrimento destes jovens tanto quanto na formação deles como futuros pesquisadores. Embora muitos ex-bolsistas terminam em outros mercados de trabalho, continuamos com o objetivo de fazer cada novo bolsista abraçar a carreira de pesquisador. Para atingir estes objetivos o grupo de pesquisa que compõe o “Projeto de Pesquisa Integrado em Análise”(veja projeto em anexo)conta com o apoio do DM-UFPB e do Instituto do Milênio - AGIMB (milenio.impa.br). Este projeto vem acolher os bolsistas PIBIC integrando-os e quebrando a rotina do trabalho solitário do bolsista de forma a promover uma grande interação entre os componentes do grupo. Todos os bolsistas do PIBIC que estarão orientados pelos pesquisadores que compõem o projeto supra-citado, além das suas pesquisas individuais, terão trabalhos paralelos em conjunto e estarão em contato com alunos de Mestrado e Doutorado o que, acreditamos, virá estimular a continuidade na carreira de pesquisador.

O Projeto de Estudo

O desenvolvimento sistemático da teoria geral das equações diferenciais elípticas de 2^a ordem tem-se transformado no começo de muitas e importantes pesquisas em Matemática. Em parte porque tais equações têm aplicações em vários campos das Ciências, especialmente em Física, em parte também por sua interação com outras áreas da própria Matemática tais como a Geometria Diferencial.

Uma equação diferencial parcial linear de 2^a ordem tem a forma

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x)$$

e uma equação quase-linear é, em geral, do tipo

$$Qu = a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + b(x,u,Du) = 0$$

onde $Du = (D_1u, D_2u, ..., D_nu)$, $D_iu = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ e temos adotado a convenção usual sobre somas.

Estas equações são ditas elípticas se a matriz $[a^{ij}]$ for definida positiva. O protótipo clássico de uma equação linear elíptica é a equação de Laplace

$$\nabla u = \Sigma D_{ii}u = 0$$

e sua forma não homogênea,

$$\nabla u = f$$

conhecida como equação de Poisson. Ambas equações são muito conhecidas de físicos e matemáticos em geral.

Provavelmente a equação elíptica quase linear mais conhecida seja a equação das superfícies mínimas

$$\Sigma \left(\frac{D_iu}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \right) = 0$$

que aparece nos problemas de minimização de área.

As propriedades dos operadores envolvidos nas equações acima mencionadas são grandes motivadores do estudo e desenvolvimento da teoria das equações diferenciais parciais elípticas.

Neste projeto teremos como objetivo:

• orientar o aluno visando o seu crescimento geral em Matemática, primeiro adquirindo mais e melhor informação e incorporando alguns conceitos novos da teoria das equações diferenciais parciais elípticas e das técnicas utilizadas por esta teoria.

• Uma outra preocupação será a formação do aluno quanto futuro matemático. Neste aspecto iremos estimular a procura de soluções novas e próprias para alguns dos problemas enfocados, fazendo o aluno dar seus primeiros passos caminho à pesquisa e à sua independência matemática.

O projeto será dividido em duas etapas:

• Uma primeira etapa na qual serão estudados os conceitos básicos necessários ao desenvolvimento posterior do projeto.

• Na segunda etapa estudaremos a equação de Laplace do ponto de vista da existência e unicidade de soluções clássicas.

Cabe salientar que em ambas as etapas pretendemos que o aluno, além do seu trabalho individual, interaja e trabalhe em conjunto com outros estudantes-bolsistas do PIBIC no Departamento de Matemática. Como antes mencionado, este projeto, se aprovado, fará parte de um projeto maior do Departamento de Matemática, o Projeto Integrado de Pesquisa em Análise de cujo grupo o orientador faz parte.

Cronograma de Execução do Plano

A duração prevista para a realização deste projeto é de 12 meses e propõe-se o seguinte cronograma.

1^a *Etapa*

até julho de 2003.

2^a Etapa

julho de 2003 - dezembro de 2003.

Conteúdo do Projeto de Pesquisa

Primeira Etapa.

1. Espaços Métricos

   1.1 Espaços Normados

   1.2 Espaços de Banach

   1.3 Espaços de Hilbert

2. Teoria da Medida

   2.1 Funções Mensuráveis

   2.2 Os Espaços L_p

   2.3 Teoremas de Convergência

3. Analise funcional

   3.1 Os Teoremas de Hahn-Banach

   3.2 O Teorema de Baire e Aplicações

   3.3 Topologia Fraca

   3.4 O Teorema de Representação de Riesz

   3.5 Operadores Compactos

3.6 Alternativa de Fredholm

Segunda Etapa.

1. A Equação de Laplace

    1.1 Desigualdade do Valor Médio.

    1.2 Princípio do Máximo - Princípio do Mínimo.

    1.3 Desigualdade de Harnack.

    1.4 A Representação de Green.

    1.5 A Integral de Poisson.

    1.6 Teoremas de Convergência para Funções Harmônicas.

    1.7 Estimativa Interior da Derivada.

2. O problema de Dirichlet para a Equação de laplace.

    2.1 O método das funções subharmônicas (Método de Perron).

Referências Bibliográficas

[1] J. L. Barbosa, *Geometria Diferencial e Cálculo das Variações* . 10^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975.

[2] L. Bers, F. John e M. Schechter, *Partial Differential equations.* Intercience John Wiley & Sons, 1966.

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Aplications.* Masson Paris, 1987

[4] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[5] E. L. Lima, *Análise real.* Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.

[6] E.L. Lima, *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, IMPA.