

Projeto de Pesquisa / Plano de Trabalho

Título

**Uma Introdução ao Estudo do Problema de Dirichlet
para a Equação de Laplace**

PIBIC - CNPq - UFPB - 2002

1 Identificação do Projeto

1.1 Título do Projeto

Uma introdução ao estudo do Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace.

1.2 Local de Execução

Departamento de Matemática - CCEN - UFPB

1.3 Área de Pesquisa

Análise - Geometria Diferencial.

1.4 Sub-Área de Pesquisa

Equações Diferenciais.

1.5 Orientador

Professor Dr. Pedro A. Hinojosa Vera

1.6 Co-Orientador

Professor Dr. Pedro A. Gomes Venegas

1.7 Orientando

Ícaro Lins Leitão da Cunha

1.8 Período de Realização

janeiro de 2003 a dezembro de 2003.

2 Introdução

2.1 Integralização do Bolsista no “Projeto de Pesquisa Integrado em Análise”

O Projeto Integrado de Pesquisa em Análise vem desenvolvendo estudos na área de análise e especificamente em equações diferenciais. O grupo de pesquisa que compõe este projeto inclui alunos desde Iniciação científica até Doutorado e varios professores-pesquisadores do Departamento de Matemática. Equações diferenciais têm aplicações não só em Matemática, também em outras ciências como Biologia, Economia, Física, Engenharia, etc. e têm atraído um grande número de jovens talentosos que sentem-se maravilhados pela beleza das técnicas e métodos envolvidos no estudo e solução de certas equações diferenciais. O PIBIC exerce um papel importantíssimo na caça e descobrimento destes jovens tanto quanto na formação deles como futuros pesquisadores. Embora muitos ex-bolsistas terminam em outros mercados de trabalho, continuamos com o objetivo de fazer cada novo bolsista abraçar a carreira de pesquisador. Para atingir estes objetivos o grupo de pesquisa que compõe o “Projeto de Pesquisa Integrado em Análise” (veja projeto em anexo) conta com o apoio do DM-UFPB e do Instituto do Milênio - AGIMB (milenioimpa.br). Este projeto vem acolher os bolsistas PIBIC integrando-os e quebrando a rotina do trabalho solitário do bolsista de forma a promover uma grande interação entre os componentes do grupo. Todos os bolsistas do PIBIC que estarão orientados pelos pesquisadores que compõem o projeto supra-citado, além das suas pesquisas individuais, terão trabalhos paralelos em conjunto e estarão em contato com alunos de Mestrado e Doutorado o que, acreditamos, virá estimular a continuidade na carreira de pesquisador.

2.2 O Projeto de Estudo

O desenvolvimento sistemático da teoria geral das equações diferenciais elípticas de 2ª ordem tem-se transformado no começo de muitas e importantes pesquisas em Matemática. Em parte porque tais equações têm aplicações em vários campos das Ciências, especialmente em Física, em parte também por sua interação com outras áreas da própria Matemática tais como a Geometria Diferencial.

Uma equação diferencial parcial linear de 2ª ordem tem a forma

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x)$$

e uma equação quase-linear é, em geral, do tipo

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du) = 0$$

onde $Du = (D_1u, D_2u, \dots, D_nu)$, $D_iu = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ e temos adotado a convenção usual sobre somas.

Estas equações são ditas elípticas se a matriz $[a^{ij}]$ for definida positiva. O protótipo clássico de uma equação linear elíptica é a equação de Laplace

$$\nabla u = \Sigma D_{ii}u = 0$$

e sua forma não homogênea,

$$\nabla u = f$$

conhecida como equação de Poisson. Ambas equações são muito conhecidas de físicos e matemáticos em geral.

Provavelmente a equação elíptica quase linear mais conhecida seja a equação das superfícies mínimas

$$\Sigma \left(\frac{D_i u}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \right) = 0$$

que aparece nos problemas de minimização de área.

As propriedades dos operadores envolvidos nas equações acima mencionadas são grandes motivadores do estudo e desenvolvimento da teoria das equações diferenciais parciais elípticas.

Neste projeto teremos como objetivo:

- orientar o aluno visando o seu crescimento geral em Matemática, primeiro adquirindo mais e melhor informação e incorporando alguns conceitos novos da teoria das equações diferenciais parciais elípticas e das técnicas utilizadas por esta teoria.

- Uma outra preocupação será a formação do aluno quanto futuro matemático. Neste aspecto iremos estimular a procura de soluções novas e próprias para alguns dos problemas enfocados, fazendo o aluno dar seus primeiros passos caminho à pesquisa e à sua independência matemática.

O projeto será dividido em duas etapas:

- Uma primeira etapa na qual serão estudados os conceitos básicos necessários ao desenvolvimento posterior do projeto.

- Na segunda etapa estudaremos a equação de Laplace do ponto de vista da existência e unicidade de soluções clássicas.

Cabe salientar que em ambas as etapas pretendemos que o aluno, além do seu trabalho individual, interaja e trabalhe em conjunto com outros estudantes-bolsistas do PIBIC no Departamento de Matemática. Como antes mencionado, este projeto, se aprovado, fará parte de um projeto maior do Departamento de Matemática, o Projeto Integrado de Pesquisa em Análise de cujo grupo o orientador faz parte.

3 Cronograma de Execução do Plano

A duração prevista para a realização deste projeto é de 12 meses e propõe-se o seguinte cronograma.

3.1 1ª Etapa

até julho de 2003.

3.2 2ª Etapa

julho de 2003 - dezembro de 2003.

4 Conteúdo do Projeto de Pesquisa

Primeira Etapa.

1. Espaços Métricos
 - 1.1 Espaços Normados
 - 1.2 Espaços de Banach
 - 1.3 Espaços de Hilbert
2. Teoria da Medida
 - 2.1 Funções Mensuráveis
 - 2.2 Os Espaços L_p
 - 2.3 Teoremas de Convergência
3. Análise funcional
 - 3.1 Os Teoremas de Hahn-Banach
 - 3.2 O Teorema de Baire e Aplicações
 - 3.3 Topologia Fraca
 - 3.4 O Teorema de Representação de Riesz
 - 3.5 Operadores Compactos
 - 3.6 Alternativa de Fredholm

Segunda Etapa.

1. A Equação de Laplace
 - 1.1 Desigualdade do Valor Médio.
 - 1.2 Princípio do Máximo - Princípio do Mínimo.
 - 1.3 Desigualdade de Harnack.

- 1.4 A Representação de Green.
 - 1.5 A Integral de Poisson.
 - 1.6 Teoremas de Convergência para Funções Harmônicas.
 - 1.7 Estimativa Interior da Derivada.
2. O problema de Dirichlet para a Equação de Laplace.
- 2.1 O método das funções subharmônicas (Método de Perron).

Referências

- [1] J. L. Barbosa, *Geometria Diferencial e Cálculo das Variações*. 10^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975.
- [2] L. Bers, F. John e M. Schechter, *Partial Differential Equations*. Interscience John Wiley & Sons, 1966.
- [3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*. Masson Paris, 1987
- [4] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [5] E. L. Lima, *Análise real*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.
- [6] E.L. Lima, *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA.