

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Monografia

**PROBLEMA LINEAR DE AUTOVALOR
COM PESO INDEFINIDO**

Bruno Henrique C. Ribeiro

Bolsista pelo Programa PIBIC/UFPB/CNPq

João Marcos Bezerra do Ó

Orientador

João Pessoa, 29 de agosto de 2004

**PROBLEMA LINEAR DE AUTOVALOR
COM PESO INDEFINIDO**

MONOGRAFIA

Sumário

Introdução	3
Objetivos	3
Metodologia	4
Problema Linear de Autovalor com Peso Indefinido	5
Um Pouco de Cálculo	5
Análise Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos	7
O Problema de Autovalor com Peso Indefinido: A Formulação Variacional	13
Um Teorema do Tipo Krein-Rutman	19
Um Princípio de Máximo	21
Referências Bibliográficas	25

Introdução

Recentemente, o estudo de problemas de autovalores envolvendo Equações Diferenciais Elípticas Lineares tem sido desenvolvido devido a sua importância na compreensão dos problemas Elípticos não-Lineares. Estes últimos surgem em diversas áreas da Ciência Moderna. Muitos problemas em Física, Biologia e da própria Matemática são modelados por Equações Elípticas não-Lineares.

Nestas notas, apresentamos inicialmente, com o mínimo de pré-requisitos possível, uma teoria abstrata para os autovalores de operadores compactos e autoadjuntos definidos em um Espaço de Hilbert. Obtemos uma caracterização *minimax* para tais autovalores. Posteriormente, aplicamos esta teoria para o estudo do seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -Lu &= \mu mu & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Onde

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u$$

é um operador fortemente elíptico em um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^N$. Para tanto, obtemos uma formulação variacional para o problema e discutimos existência de soluções fracas, de acordo com um estudo de hipóteses sobre a função m , que é chamada função peso. Feito isto, buscamos informações sobre o sinal de tais soluções e finalizamos o trabalho discutindo quando que essas soluções fracas são, na verdade, clássicas.

Objetivos

O objetivo principal deste Trabalho é a familiarização com técnicas *minimax*, métodos variacionais e teorias da Análise Funcional, bastante utilizados nas

pesquisas de EDP elípticas. Para tal, estudamos um problema específico, cuja escolha foi motivada pelo fato de que os pré-requisitos são mínimos para sua total compreensão e também porque é um problema linear de extrema importância para o estudo posterior em Equações Elípticas não-Lineares.

Outros objetivos são alcançadas como subproduto deste estudo, pois nossa meta é de fato inserir o estudante em um ambiente de pesquisa, escolhendo problemas que requeiram técnicas, metodologias e aplicabilidade, tais que o estado atual de conhecimento do objeto estudado tenha grande interesse científico.

Metodologia

Fizemos também uso da **metodologia** tradicional, a qual tem sido feita com sucesso nas iniciações à pesquisa em matemática, isto é, realizações de seminários semanais com lista de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

Problema Linear de Autovalor com Peso Indefinido

Um Pouco de Cálculo

Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Hilbert H , f e $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais de classe C^1 definidas em U . Considere a hipersuperfície

$$S = \{x \in U : g(x) = 0 \text{ e } g'(x) \neq 0\}$$

que, obviamente, é suposta não vazia. Queremos encontrar pontos extremos de f com a condição de vínculo $g \equiv 0$. Esta é uma questão clássica no Cálculo das Variações, que é resolvida usando o Cálculo Diferencial, da seguinte forma.

Dizemos que $x_0 \in S$ é um ponto crítico de f restrito a S ($f|_S$) se para todo $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, caminho de classe C^1 com $\alpha(0) = x_0$, temos

$$\frac{d}{dt}f(\alpha(t))\big|_{t=0} = 0. \quad (1)$$

Observe que um ponto de máximo ou mínimo local de f em S é um ponto crítico de f restrito a S .

Proposição 1 $x_0 \in S$ é um ponto crítico de $f|_S$ se, e somente se

$$f'(x_0) = \lambda g'(x_0) \quad (2)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação: O número real λ é chamado de Multiplicador de Lagrange e vemos facilmente que é dado por

$$\lambda = f'(x_0) \cdot g'(x_0) \|g'(x_0)\|^{-2}.$$

Nesta seção, utilizamos “ $\cdot$ ” para denotar o produto interno em H .

Para demonstrar esta proposição, precisaremos do seguinte

Lema 2 *Seja $\omega \in H$, com $\omega \perp g'(x_0)$. Então existe um caminho de classe C^1 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = x_0$, tal que $\alpha'(0) = \omega$.*

Prova: Pelo Teorema da Representação de Riesz-Freché, identificamos o funcional $g'(x_0) : H \rightarrow \mathbb{R}$ por seu representante em H . Sejam H_2 o espaço unidimensional de H gerado por $g'(x_0)$, e H_1 o espaço ortogonal a H_2 . Assim, $H = H_1 \oplus H_2$, pois H_2 é fechado, por ser de dimensão finita. Portanto, cada $x \in H$ tem uma única decomposição $x = u + v$, $u \in H_1$ e $v \in H_2$. Então $x_0 = u_0 + v_0$. Procederemos agora afim de obter uma representação cartesiana de S . Para tanto, é conveniente trabalhar com uma representação de H como o produto cartesiano $H_1 \times H_2$, onde cada $x = u + v \in H$ é associado ao par $(u, v) \in H_1 \times H_2$. Defina $\hat{g} : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $\hat{g}(u, v) = g(u + v)$, onde U_1 e U_2 são vizinhanças de $u_0 \in H_1$ e $v_0 \in H_2$, respectivamente. Estas vizinhanças são escolhidas de tal forma que $u + v \in U$ para todo $u \in U_1$ e todo $v \in U_2$. Por definição, vemos que g é de classe C^1 e suas derivadas parciais são dadas por

$$\hat{g}'_1(u_1, v_1) \cdot u = g'(x_1) \cdot u \quad \hat{g}'_2(u_1, v_1) \cdot v = g'(x_1) \cdot v.$$

Conseqüentemente, $\hat{g}'_2(u_0, v_0)$ é um isomorfismo entre H_2 e $\mathbb{R}$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças $V_1 \subset U_1$ de u_0 , $V_2 \subset U_2$ de v_0 e uma função de classe C^1 , $h : V_1 \rightarrow V_2$, tais que $v_0 = h(u_0)$ e

$$\hat{g}(u, h(u)) = 0, \quad \forall u \in V_1. \quad (3)$$

Defina $p : V_1 \rightarrow H_1 \times H_2$ por $p(u) = (u, h(u))$. Esta é a representação cartesiana de S . Observe que

$$p'(u_1)u = (u, h'(u_1)u), \quad \forall u \in H_1.$$

Segue de (3) que

$$\hat{g}'_1(u_0, v_0) \cdot u + \hat{g}'_2(u_0, v_0) \cdot [h'(u_0)u] = 0$$

e, uma vez que, $\hat{g}'_1(u_0, v_0) \cdot u = 0$ e $\hat{g}'_2(u_0, v_0) \neq 0$, obtemos $h'(u_0)u = 0$ para todo $u \in H_1$. Assim,

$$p'(u_0)u = (u, 0).$$

Agora, dado ω ortogonal a $g'(x_0)$, defina

$$\alpha(t) = p(u_0 + \omega t) \quad \text{para } |t| < \varepsilon,$$

onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de tal forma que $u_0 + \omega t \in V_1$ para todo $|t| < \varepsilon$. Claramente

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= p(u_0) = (u_0, h(u_0)) = (u_0, v_0) \quad \text{e} \\ \alpha'(t)|_{t=0} &= p'(u_0) \cdot \omega = (\omega, 0) \end{aligned}$$

■

Demonstração da Proposição 1: Seja x_0 um ponto crítico de $f|_S$. Assim, para todo caminho $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = x_0$ de classe C^1 , temos

$$f'(x_0) \cdot \alpha'(0) = 0 \quad (\text{de (1)}).$$

Portanto, pelo Lema 2, para todo $\omega \in H$ ortogonal a $g'(x_0)$, temos

$$f'(x_0) \cdot \omega = 0$$

que nos cede (2), com $\lambda = 0$. Agora, observe que

$$g'(x_0) \cdot \alpha'(0) = 0 \quad (\text{de } g(\alpha(t)) = 0) \quad (4)$$

para todo caminho de classe C^1 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = x_0$. Então se admitimos (2), obtemos de (4) que $f'(x_0) \cdot \alpha'(0) = 0$, o que prova que x_0 é um ponto crítico de $f|_S$. ■

Análise Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma $\|\cdot\|$.

Dado $L : H \rightarrow H$ operador linear, sejam $y \in H$ e $h_y : H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_y(x) = (Lx, y)$. Tal funcional é linear e contínuo em H , dada a continuidade e a linearidade do produto interno. Pelo Teorema da Representação de Riesz-Frechet, existe $z \in H$ tal que $(Lx, y) = h_y(x) = (x, z)$. Definimos o operador $L^* : H \rightarrow H$ de forma que $L^*(y) = z$. Observe que para cada $y \in H$ temos associado um único funcional h_y , e este funcional, por sua vez, implica na existência e unicidade de z . Assim, L^* está bem definido. Mais ainda, L^* é linear e contínuo com $\|L\| = \|L^*\|$. L^* é denominado por operador adjunto a L . Um operador é autoadjunto quando $L = L^*$.

Um operador linear é dito compacto quando leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos. É fácil ver que todo operador linear compacto é contínuo.

Dizemos que $(x_n) \subset H$ converge fracamente para $x_0 \in H$ quando, para todo f funcional linear e contínuo em H , temos que $f(x_n)$ converge para $f(x_0)$. Dessa forma, um operador é compacto se, e somente se, aplica sequências fracamente convergentes em sequências convergentes.

Daqui em diante, $T : H \rightarrow H$ denotará um operador linear compacto e autoadjunto.

Lema 3 *Se*

$$\lambda_1 \equiv \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) > 0 \quad (5)$$

então existe $\phi_1 \in H$, com $\|\phi_1\| = 1$, tal que

$$(T\phi_1, \phi_1) = \lambda_1, \quad T\phi_1 = \lambda_1\phi_1. \quad (6)$$

Prova: Uma vez que T é compacto, temos que $(Tx, x) \leq \|T\|$ para $\|x\| = 1$, donde $\lambda_1 < \infty$. Tomemos $\|x_n\| = 1$ tal que $(Tx_n, x_n) \rightarrow \lambda_1$ (podemos fazer isso por definição de supremo). Como estamos em um espaço de Hilbert, que é reflexivo, podemos admitir, passando para subsequências se necessário, que $x_n \rightharpoonup \phi_1$ (onde $\rightharpoonup$ designa convergência fraca) e, como T é completamente contínuo, $Tx_n \rightarrow T\phi_1$. Assim, obtemos a primeira parte de (6). Para a segunda parte, usamos a proposição 1 com $f(x) = (Tx, x)$ e $g(x) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 1)$. Observe que f assim definida é $C^1(H, \mathbb{R})$, pois

$$\begin{aligned} f'(x_0) \cdot v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T(x_0 + tv), x_0 + tv) - (Tx_0, x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t(Tx_0, v) + t^2(Tv, v)}{t} \\ &= 2(Tx_0, v). \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos que $g \in C^1(H, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} g'(x_0) \cdot v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + tv) - g(x_0)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x_0 + tv, x_0 + tv) - (x_0, x_0)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t(x_0, v) + t^2(v, v)}{t} \\ &= (x_0, v). \end{aligned}$$

Dessa forma, o conjunto S é dado por

$$S = \{x \in H \mid \|x\| = 1\}$$

Observe que $\|\phi_1\| \leq \liminf \|x_n\| = 1$. Suponhamos que $\|\phi_1\| < 1$. Tomando $x = \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|}$,

$$(Tx, x) = \frac{1}{\|\phi_1\|^2} (T\phi_1, \phi_1) > (T\phi_1, \phi_1) = \lambda_1$$

o que é um absurdo. Assim, de fato, $\|\phi_1\| = 1$. Logo, ϕ_1 é um ponto crítico de $f|_S$, uma vez que $\|\phi_1\| \in S$ e $f(\phi_1) = \sup_{x \in S} f(x)$. Concluimos portanto que existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(\phi_1) = \lambda_2 g'(\phi_1)$$

ou seja,

$$2(T\phi_1, v) = \lambda_2(\phi_1, v), \quad \forall v \in H. \quad (7)$$

Logo,

$$T\phi_1 = \lambda\phi_1, \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{2}$$

Além disso, $\lambda = \lambda_1$, basta tomar $\phi_1 = v$ em (7). ■

Por argumentos completamente similares temos o seguinte

Lema 4 *Se*

$$\lambda_{-1} \equiv \inf_{\|x\|=1} (Tx, x) < 0 \quad (8)$$

então existe $\phi_{-1} \in H$, com $\|\phi_{-1}\| = 1$, tal que

$$(T\phi_{-1}, \phi_{-1}) = \lambda_{-1}, \quad T\phi_{-1} = \lambda_{-1}\phi_{-1}. \quad (9)$$

Observação: λ_1 definido por (5) é o maior autovalor de T , uma vez que, tomando λ autovalor de T com ϕ autovetor associado ($\|\phi\| = 1$), temos

$$\lambda_1 = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \geq (T\phi, \phi) = (\lambda\phi, \phi) = \lambda.$$

Similarmente λ_{-1} é o menor autovalor. Este procedimento pode ser repetido para obter outros autovalores para T , considerando sua restrição ao complementar ortogonal de $\mathbb{R}\phi_1$ ($\mathbb{R}\phi_1^\perp$). De fato, isto acontece porque $T(\mathbb{R}\phi_1) \subset \mathbb{R}\phi_1$ e, consequentemente, $T : (\mathbb{R}\phi_1)^\perp \rightarrow (\mathbb{R}\phi_1)^\perp$ é ainda compacto e autoadjunto.

Podemos então generalizar, da seguinte forma:

Proposição 5 *Se*

$$\lambda_n \equiv \sup \{ (Tx, x) : \|x\| = 1, \quad x \perp \phi_1, \dots, \phi_{n-1} \} \quad (10)$$

então existe $\phi_n \in H$, com $\|\phi_n\| = 1$, tal que

$$(T\phi_n, \phi_n) = \lambda_n, \quad T\phi_n = \lambda_n\phi_n.$$

Uma afirmação similar vale quando

$$\lambda_{-n} \equiv \inf \{ (Tx, x) : \|x\| = 1, \quad x \perp \phi_{-1}, \dots, \phi_{-(n-1)} \} \quad (11)$$

No próximo lema, exibimos algumas propriedades elementares de operadores lineares compactos e autoadjuntos.

Lema 6 *T é autoadjunto e compacto.*

1. *Autovetores correspondentes a diferentes autovalores são ortogonais.*
2. *Se λ é um autovalor de T, então o autoespaço $N(T - \lambda I)$ tem dimensão finita.*
3. *Os autovalores de T não se acumulam em um ponto $\lambda \neq 0$.*

Prova: 1) Sejam $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ autovalores de T com ϕ_1 e ϕ_2 autovetores associados, respectivamente. Assim,

$$(T\phi_1, \phi_2) = (\phi_1, T\phi_2)$$

donde vemos que

$$\lambda_1(\phi_1, \phi_2) = \lambda_2(\phi_1, \phi_2)$$

e portanto,

$$(\phi_1, \phi_2) = 0$$

2) Seja $B_1[0]$ a bola fechada de centro 0 e raio 1 de H restrita a $N(T - \lambda I)$. É suficiente provar que $B_1[0]$ é compacta. Para tanto, seja (x_n) uma sequência em $B_1[0]$. Como $\|x_n\| \leq 1$, temos que existe $x \in H$ tal que, passando para subsequências se necessário, $x_n \rightharpoonup x$. Como T é compacto, segue que $Tx_n \rightarrow Tx$, donde $\lambda x_n \rightarrow Tx$. Assim, $x = Tx/\lambda$ e $x_n \rightarrow x$, concluindo a demonstração.

3) Sabemos que o conjunto dos autovalores de T é limitado. Portanto, é suficiente provar que se esse conjunto possui um ponto de acumulação λ então $\lambda = 0$. Por contradição suponhamos que $\lambda \neq 0$. Nesse caso existe uma sequência $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ de autovalores de T com $|\lambda_n| > \frac{|\lambda|}{2}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$. Se $x_1, x_2, \dots$ são autovetores associados a esses autovalores com $\|x_n\| = 1$, então se $i \neq j$, temos $\|Tx_i - Tx_j\|^2 = \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 \geq |\lambda|^2$. Resulta que a sequência (Tx_n) não admite uma subsequência convergente, o que é absurdo. ■

Um resultado interessante é que todos os autovalores diferentes de 0 são obtidos através do processo descrito na proposição 5. A prova é relativamente simples em vista do seguinte

Lema 7 *Para cada $x \in H$ temos*

$$Tx = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda_i(x, \phi_i)\phi_i. \quad (12)$$

Nessa soma, tiramos a parcela $i = 0$.

Vejam os que todos os autovalores não nulos de T são descritos por (10). Suponha, por absurdo, que existe um autovalor $0 \neq \lambda \neq \lambda_i$, para todo i . Pelo Lema 6 item 1, um autovetor ϕ associado a λ é ortogonal a todos ϕ_i 's. Por (12) $T\phi = 0$, o que é impossível.

Para provarmos o Lema (7) precisamos do seguinte resultado, que dá uma caracterização da norma de um operador autoadjunto. Lembramos que a norma de um operador linear contínuo $T : H \rightarrow H$ é definida por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Lema 8 *Seja $T : H \rightarrow H$ um operador autoadjunto em H . Então*

$$\sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| = \|T\| \quad (13)$$

Prova: Notemos primeiramente que

$$|(Tx, x)| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2,$$

donde

$$\sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

. Por outro lado, denotando $\eta = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$. Para quaisquer $x, y \in H$

$$\eta \geq \left(T \left(\frac{x+y}{\|x+y\|} \right), \frac{x+y}{\|x+y\|} \right) \Rightarrow$$

$$\eta \|x+y\|^2 \geq (T(x+y), x+y) = (Tx, x) + (Ty, y) + 2(Tx, y),$$

e similarmente,

$$-\eta \|x-y\|^2 \leq (T(x-y), x-y) = (Tx, x) + (Ty, y) - 2(Tx, y).$$

Somando a primeira inequação com o inverso da segunda e usando a identidade do paralelogramo, temos:

$$4(Tx, y) \leq 2\eta(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (14)$$

Agora, para $\|x\| = 1$ ou $Tx = 0$ ou $Tx \neq 0$. Para o último caso tome $y = Tx/\|Tx\|$ em (14) para obter $\|Tx\| \leq \eta$, que vale para todo $\|x\| = 1$. ■

Prova do Lema 7: Seja

$$x_n = x - \sum_{i=-n}^n (x, \phi_i) \phi_i, \quad (i \neq 0).$$

É suficiente provar que $Tx_n \rightarrow 0$. Já que $x_n \perp \phi_i$ para $i \in \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$, temos, pela Proposição 10 e o Lema 8,

$$\|Tx_n\| \leq \max\{|\lambda_{-n}|, \lambda_n\} \|x_n\|.$$

Donde temos a conclusão, pois $\|x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=-n}^n (x, \phi_i)^2 \leq \|x\|^2$. ■

A fórmula (10) para o n -ésimo autovalor positivo apresenta a inconveniência de requerer conhecimento de todos os autovalores positivos anteriores. Analogamente, temos esta dificuldade no cálculo de λ_{-n} . O próximo resultado ameniza a situação.

Proposição 9 *Para cada n positivo*

$$\lambda_n = \inf_{F_{n-1}} \sup\{(Tx, x) \mid \|x\| = 1 \text{ e } x \perp F_{n-1}\} \quad (15)$$

onde este ínfimo é tomado sobre todos os subespaços F_{n-1} de H com dimensão $n - 1$. Uma fórmula similar vale para λ_{-n} , isto é,

$$\lambda_{-n} = \sup_{F_{n-1}} \inf\{(Tx, x) \mid \|x\| = 1 \text{ e } x \perp F_{n-1}\}. \quad (16)$$

Prova: Denotemos por Λ_n o lado direito de (15). Tomando F_{n-1} o espaço gerado por $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, vemos, pela fórmula (10) na Proposição 5, que $\Lambda_n \leq \lambda_n$. Por outro lado, seja $h_1, \dots, h_{n-1}$ um sistema qualquer de vetores dois a dois ortogonais em H , e F_{n-1} o subespaço gerado por eles. Escolhemos um vetor

$\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ de tal forma que $(\phi, h_j) = 0$ para $j = 1, \dots, n - 1$, e, ainda, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$, ou seja, $\|\phi\| = 1$. Logo

$$(T\phi, \phi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_n,$$

donde

$$\sup\{(Tx, x) \mid \|x\| = 1 \text{ e } x \perp F_{n-1}\} \geq \lambda_n, \quad \forall F_{n-1},$$

e assim $\Lambda_n \geq \lambda_n$ ■

A fórmula (15) ainda tem uma inconveniência, uma vez que $\sup(Tx, x)$ tem que ser tomado sobre x em um espaço de dimensão infinita. A seguir, temos um resultado com o objetivo de facilitar o cálculo de λ_n e λ_{-n} .

Proposição 10 *Para cada n positivo*

$$\lambda_n = \sup_{F_n} \inf \{ (Tx, x) \mid \|x\| = 1 \text{ e } x \in F_n \} \quad (17)$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços F_n de H com dimensão n . Uma fórmula análoga vale para λ_{-n} , a saber

$$\lambda_{-n} = \inf_{F_n} \sup \{ (Tx, x) \mid \|x\| = 1 \text{ e } x \in F_n \}. \quad (18)$$

Prova: Denotemos por Γ_n o lado direito de (17). Tomando F_n o subespaço gerado por $\phi_1, \dots, \phi_n$, temos, para todo $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \in F_n$, $\|x\| = \sum \alpha_i^2 = 1$, que

$$(Tx, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_n,$$

pois $\lambda_j \geq \lambda_n$ com $j = 1, \dots, n-1$. Assim $\Gamma_n \geq \lambda_n$. Por outro lado, dado um subespaço F_n qualquer de dimensão n , escolha um $x \in F_n$ tal que $x \perp \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$. Pela Proposição 5, $(Tx, x) \leq \lambda_n$. Consequentemente,

$$\inf_{x \in F_n} (Tx, x) \leq \lambda_n, \quad \forall F_n.$$

Assim $\Gamma_n \leq \lambda_n$. ■

Observação: Todos os ínfimos e supremos nas caracterizações acima são de fato atingidos e, portanto, podemos substituí-los por mínimos e máximos.

O Problema de Autovalor com Peso Indefinido: A Formulação Variacional

Consideremos o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -Lu = \mu mu & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

onde

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u \quad (20)$$

é um operador fortemente elíptico em um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), isto é, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (21)$$

Temos ainda, por hipótese, que $a_{ij} = a_{ji}$ e $a_0(x) \geq 0$ em Ω . A função peso $m : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é considerada pertencente ao Espaço de Lebesgue $L^r(\Omega)$ com $r > N/2$. Enfatizamos que m pode mudar de sinal em Ω . Admitimos ainda $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ e $a_0 \in L^{N/2}(\Omega)$.

Em nossa formulação variacional, usamos o Espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Lembramos que $H_0^1(\Omega)$ é o fecho do espaço

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega \text{ é compacto}\}$$

munido da norma $\|u\|_0 = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}$, a qual é equivalente à norma

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{L^2}, \quad (22)$$

devido a desigualdade de Poincaré, a saber

$$\|u\|_{L^2} \leq c \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

As normas introduzidas acima provêm dos seguintes produtos internos

$$\int (\nabla u \cdot \nabla v + uv)$$

e

$$\int \nabla u \cdot \nabla v.$$

A formulação variacional do problema (19) é dada a seguir:

$$\begin{cases} a(u, v) = \mu \int m u v, & \forall v \in H_0^1 \\ u \in H_0^1 \end{cases} \quad (23)$$

onde $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear definida por

$$a(u, v) = \int \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x) u v \right) dx. \quad (24)$$

Lembramos também as imersões de Sobolev: $H_0^1 \hookrightarrow L^q$, isto é, $H_0^1(\Omega)$ está imerso em $L^q(\Omega)$ continuamente, se $1 \leq q \leq 2^* = 2N/(N-2)$, e compactamente, se $1 \leq q < 2^*$.

Usando as imersões de Sobolev, vemos, pelas hipóteses consideradas em a_0 e m , que as expressões $\int m u v$ e $\int a_0 u v$, para $u, v \in H_0^1$ estão bem definidas. Além disso, a forma (24) define em H_0^1 um produto interno cuja norma associada é equivalente à norma dada por (22), uma vez que

1. a é bilinear,
2. a é simétrica [$a(u, v) = a(v, u)$],
3. a é coerciva, pois

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \int a_0(x) u^2 dx \\
&\geq c_0 \int |\nabla u|^2 + \int a_0 u^2 \quad \text{por (21)} \\
&\geq c \|u\|_{H^1}^2, \quad \text{pois } a_0(x) \geq 0 \text{ e}
\end{aligned}$$

4. a é contínua,

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \sum_{i,j} \int \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| + \int |a_0 uv| \\
&\leq \sum \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2} + \|a_0\|_{L^{N/2}} \|u\|_{L^{2^*}} \|v\|_{L^{2^*}} \\
&\leq k \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

devido a $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ e à desigualdade de Poincaré.

Denotemos este produto interno por $(\cdot, \cdot)_a$ e a norma correspondente por $\|\cdot\|_a$.

Fixado $u \in H_0^1$, a função $v \rightarrow \int muv$ é um funcional linear contínuo em H_0^1 . Pelo teorema da representação de Riesz-Frechet, existe um único elemento $Tu \in H_0^1$, tal que

$$(Tu, v)_a = \int muv. \quad (25)$$

É claro que $T : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ é linear. Mais ainda, T é contínuo, pois

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_a^2 &= (Tu, Tu)_a \\
&= \int muTu \\
&\leq C \|m\|_{L^r} \|u\|_a \|Tu\|_a.
\end{aligned}$$

T é também autoadjunto, por definição. Além disso, T é compacto. Com efeito, seja (u_n) uma sequência limitada em H_0^1 . Passando para uma subsequência, suponha que $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1 . Usando a imersão compacta, sabemos que $u_n \rightarrow u$

em L^s com $1 < s < 2^*$. Usando (25) com u substituído por $u_n - u$ e v por $Tu_n - Tu$, temos

$$(Tu_n - Tu, Tu_n - Tu)_a = \int_m (u_n - u)(Tu_n - Tu).$$

Usando a desigualdade de Hölder, com $1/s = 1 - 1/r - 1/2^*$ ($s < 2^*$ uma vez que $r > N/2$), temos

$$\|Tu_n - Tu\|_a^2 \leq \|m\|_{L^r} \|u_n - u\|_{L^s} \|Tu_n - Tu\|_{L^{2^*}}$$

que nos dá

$$\|Tu_n - Tu\|_a \leq c \|u_n - u\|_{L^s} \Rightarrow Tu_n \rightarrow Tu \in H_0^1.$$

O problema (23) pode, portanto, ser reescrito

$$\begin{cases} (u, v)_a = \mu(Tu, v)_a, & \forall v \in H_0^1 \\ u \in H_0^1 \end{cases}$$

Ou ainda

$$Tu = \frac{1}{\mu}u.$$

Dessa forma, podemos aplicar toda a teoria desenvolvida na seção anterior para descrever os autovalores e autovetores (em H_0^1) do problema (19).

Proposição 11 *Os autovalores do problema (23), caso existam, são caracterizados por*

$$\frac{1}{\mu_n} = \sup_{F_n} \inf \left\{ \int m u^2 \mid \|u\|_a = 1 \text{ e } u \in F_n \right\}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{\mu_{-n}} = \inf_{F_n} \sup \left\{ \int m u^2 \mid \|u\|_a = 1 \text{ e } u \in F_n \right\}$$

onde F_n varia sobre todos os subespaços de H_0^1 de dimensão n . As autofunções ϕ_n correspondentes são tais que

$$a(\phi_n, v) = \mu_n \int m \phi_n v, \quad \forall v \in H_0^1 \quad (27)$$

e

$$a(\phi_n, \phi_n) = 1; \quad \frac{1}{\mu_n} = \int m \phi_n^2. \quad (28)$$

Por resultados da seção anterior, os autovalores acima não acumulam, exceto em $+\infty$ ou $-\infty$. É claro que precisamos garantir a existência de tais sequências de autovalores e fazemos isto na seguinte

Proposição 12 *Se $\Omega_+ = \{x \in \Omega : m(x) > 0\}$ e $\Omega_- = \{x \in \Omega : m(x) < 0\}$, então:*

1. $|\Omega_+| = 0 \Rightarrow$ não existe μ_n positivo.
2. $|\Omega_-| = 0 \Rightarrow$ não existe μ_{-n} negativo.
3. $|\Omega_+| > 0 \Rightarrow$ existe uma sequência (μ_n) positiva tal que $\mu_n \rightarrow +\infty$.
4. $|\Omega_-| > 0 \Rightarrow$ existe uma sequência (μ_{-n}) negativa tal que $\mu_{-n} \rightarrow -\infty$.

($|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue do Conjunto).

Prova:

1. Suponha que existe $\mu_n > 0$ e seja $\phi_n \neq 0$ uma autofunção associada. Sabemos que

$$a(\phi_n, v) = \mu_n \int m \phi_n v \quad \forall v \in H_0^1.$$

Tomando $v = \phi_n$, temos

$$a(\phi_n, \phi_n) = \mu_n \int m \phi_n^2.$$

Mas a é coerciva e, portanto,

$$a(\phi_n, \phi_n) \geq c |\phi_n|^2 > 0.$$

Como $\mu_n > 0$, temos

$$\int m \phi_n^2 > 0 \Rightarrow |\Omega_+| > 0.$$

2. Análogo a 1.
3. Sejam $B_1, \dots, B_n$ bolas duas a duas disjuntas em Ω tais que os conjuntos $B_j \cap \Omega_+$ têm medida positiva. Sejam $u_1, \dots, u_n \in C_0^\infty$ funções com suporte nas bolas correspondentes de tal forma que $\int m u_j^2 > 0$. Vejamos como podemos tomar tais funções. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \|m \chi_{B_j \cap \Omega_+}\|_{L^1}$. Como $C_0^\infty(B_j)$ é denso em $L^{r'}(B_j)$, com $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$, para este mesmo ε , existe $v_j \in C_0^\infty(B_j)$ tal que

$$\|v_j - \chi_{B_j \cap \Omega_+}\|_{L^{r'}} < \frac{\varepsilon}{\|m\|_{L^r}}, \quad v_j \geq 0.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\left| \int m v_j - \int m \chi_{B_j \cap \Omega_+} \right| \leq \|m\|_{L^r} \|v_j - \chi_{B_j \cap \Omega_+}\|_{L^{r'}} < \varepsilon,$$

donde

$$\int m v_j > \int m \chi_{B_j \cap \Omega_+} - \varepsilon > 0$$

Tomemos, assim, $v_j = u_j^2$, normalizando-os de tal forma que $\int m u_j^2 = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Afirmamos que $\mu_n > 0$. Com efeito, seja F_n o subespaço gerado pelas funções u_j (que são ortogonais duas a duas, já que as bolas onde o suporte delas está definido são disjuntas). Logo, para $u = \sum \alpha_j u_j \in F_n$, temos

$$\int m u^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \int m u_j^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2$$

e

$$a(u, u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 a(u_j, u_j) \leq c \sum_{j=1}^n \alpha_j^2$$

onde $c = \max_{j=1, \dots, n} a(u_j, u_j) > 0$. Então

$$\int m u^2 \geq \frac{1}{c} a(u, u) > 0, \quad \forall u \in F_n.$$

Tomando o ínfimo sobre $u \in F_n$ com $\|u\| = 1$ e depois o supremo sobre os subespaços de dimensão n de H , temos, por (26), a afirmação desejada.

4. Análogo a 3.

■

Os próximos dois resultados explicam como $\mu_n = \mu_n(m)$ varia como função de m . Ambos seguem diretamente da proposição 11.

Proposição 13 *Sejam $m, \hat{m} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ funções em $L^r(\Omega)$, com $r > N/2$, tais que $m(x) \leq \hat{m}(x)$ q.t.p. em Ω . Suponha que, para um dado n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), os autovalores $\mu_n(m)$ e $\mu_n(\hat{m})$ existam. Então*

$$\mu_n(m) \geq \mu_n(\hat{m}). \quad (29)$$

Prova: A demonstração é realmente simples, pois, quando $n > 0$,

$$m(x) \leq \hat{m}(x) \Rightarrow$$

$$u^2 m(x) \leq u^2 \hat{m}(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\int u^2 m(x) &\leq \int u^2 \widehat{m}(x) \Rightarrow \\
\inf_{u \in F_n} \int u^2 m(x) &\leq \inf_{u \in F_n} \int u^2 \widehat{m}(x) \Rightarrow \\
\sup_{F_n} \inf_{u \in F_n} \int u^2 m(x) &\leq \sup_{F_n} \inf_{u \in F_n} \int u^2 \widehat{m}(x) \Rightarrow \\
\frac{1}{\mu_n(m)} &\leq \frac{1}{\mu_n(\widehat{m})}.
\end{aligned}$$

De forma análoga temos para $n < 0$. ■

Proposição 14 $\mu_n(m)$ é uma função contínua de m , na norma de $L^{N/2}(\Omega)$. Em outras palavras, se $(m_j) \subset L^r(\Omega)$ converge para $m \in L^r(\Omega)$ na norma de $L^{N/2}$, então $\mu_n(m_j)$ converge para $\mu_n(m)$.

Observação: Se $m(x) \equiv 1$ em Ω , usamos a seguinte notação $\mu_j(1) = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$. Observe que não existe j negativo, pois $|\Omega_-|$ é nula, para este m . É fácil ver, portanto, que

$$\mu_j(\alpha) = \lambda_j \alpha^{-1}, \text{ para } \alpha > 0.$$

Um Teorema do Tipo Krein-Rutman

Teorema 15 *Seja $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em $L^r(\Omega)$, com $r > N/2$, (não necessariamente positiva). Suponha que $m > 0$ em um subconjunto de Ω com medida positiva. Então o primeiro autovalor positivo μ_1 de (23) é simples (i.e., possui multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1) e ϕ_1 pode ser escolhido estritamente positivo em Ω . Uma afirmação equivalente é satisfeita quando $m < 0$ em um conjunto de medida positiva.*

Prova: Dividiremos esta demonstração em 3 partes:

1. Seja $\omega \in H_0^1$ uma autofunção associada ao primeiro autovalor positivo μ_1 . Ainda não sabemos se alguns μ_j 's são iguais ou não a μ_1 , e conseqüentemente, ω pode ser uma combinação linear de ϕ_j 's. Em qualquer caso ω é uma solução de

$$a(\omega, v) = \mu_1 \int m \omega v, \quad \forall v \in H_0^1. \quad (30)$$

Afirmamos que ω não muda de sinal em Ω . Com efeito, suponhamos que sim, e definamos $\omega^+ = \max(\omega, 0)$ e $\omega^- = \min(\omega, 0)$. Sabemos que ω^+ e ω^- pertencem também a H_0^1 . Então

$$\int m\omega^2 = \int m(\omega^+)^2 + \int m(\omega^-)^2 \equiv \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a(\omega, \omega) = a(\omega^+, \omega^+) + a(\omega^-, \omega^-) \equiv \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 > 0.$$

Uma aritmética simples mostra que ou

$$(i) \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

ou então,

$$(ii) \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} < \max\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right).$$

Uma vez que

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\int m\omega^2}{a(\omega, \omega)} = \frac{\int m(\omega^+)^2 + \int m(\omega^-)^2}{a(\omega^+, \omega^+) + a(\omega^-, \omega^-)}$$

concluimos que ω^+ e ω^- são também autofunções correspondentes a μ_1 . Assim, elas são soluções de (30) e, de acordo com um resultado de Stampacchia (vide [8], corolário 8.1 p.238) $\omega^+ > 0$, q.t.p. e $\omega^- < 0$ q.t.p. em Ω , o que é um absurdo. O fato de que ϕ_1 pode ser tomado > 0 em Ω segue do mesmo resultado mencionado.

2. Agora provemos que a multiplicidade geométrica de μ_1 é 1, ou seja, o subespaço gerado por uma autofunção associada a μ_1 têm dimensão 1. De fato, Sejam ω_1 e ω_2 autofunções associadas a μ_1 . Pela etapa anterior nós sabemos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, a autofunção $\omega_1 + \alpha\omega_2$ tem sinal definido. Então os conjuntos

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \omega_1 + \alpha\omega_2 \geq 0\} \quad \text{e} \quad B = \{\alpha \in \mathbb{R} : \omega_1 + \alpha\omega_2 \leq 0\}$$

são não-vazios, fechados e $A \cup B = \mathbb{R}$. Consequentemente, existe $\tilde{\alpha} \in A \cap B$, e, sendo assim, $\omega_1 + \tilde{\alpha}\omega_2 = 0$, que nos diz que ω_1 e ω_2 são linearmente dependentes.

3. A multiplicidade algébrica de μ_1 é também 1, ou seja, μ_1 é um autovalor simples. De fato, nosso objetivo é provar que $N(I - \mu_1 T)^2 = N(I - \mu_1 T)$. Seja $u \in N(I - \mu_1 T)^2$. Então, pela etapa anterior, $u - \mu_1 T u = t\phi_1$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Tomando o produto interno com ϕ_1 :

$$\begin{aligned} t(\phi_1, \phi_1)_a &= (u - \mu_1 T u, \phi_1)_a \\ &= (u, \phi_1)_a - \mu_1 (T u, \phi_1)_a \\ &= (u, \phi_1)_a - (u, \mu_1 T \phi_1)_a \\ &= (u, \phi_1)_a - (u, \phi_1)_a \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $t = 0$, e portanto $u \in N(I - \mu_1 T)$.

■

Um Princípio de Máximo

Considere o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = h & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (31)$$

O operador L é o mesmo do problema de autovalor apresentado em (20). O problema (31) é discutido em sua formulação variacional, dada por

$$\begin{cases} a(u, v) = \int hv & \text{em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (32)$$

Admitimos, por enquanto, que $h \in L^{2^*}$, onde recordamos $2^* = 2N/(N - 2)$. Sob esta hipótese, segue, das imersões de Sobolev, que a função $v \rightarrow \int hv$ é um funcional linear contínuo em H_0^1 . Então pelo teorema da representação de Riesz-Frechét, existe um $\tilde{h} \in H_0^1$ tal que $\int hv = (\tilde{h}, v)_a, \quad \forall v \in H_0^1$. Tal $\tilde{h}$ é a solução única de (32) (uma vez que a é forma bilinear coerciva e contínua em H_0^1). Desta forma, definimos uma função linear e contínua $S : L^{2^*} \rightarrow H_0^1$ com $S(h) = \tilde{h}$. Aplicando o teorema 8.1 ([3], p. 179) temos que $\tilde{h}(x) \geq 0$ sempre que $h(x) \geq 0$. Observe que esta afirmação é um princípio de máximo e possui uma hipótese crucial: $a_0(x) \geq 0$ em Ω . O próximo resultado mostra de que forma esta hipótese pode ser descartada.

Teorema 16 *Seja $u \in H_0^1$ uma solução de*

$$\begin{cases} Lu - \lambda mu = h & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (33)$$

onde $h \in L^{2^}(\Omega)$ e $h \geq 0$ q.t.p. em Ω . Suponha que $m \in L^\infty$ é positiva em um subconjunto de Ω com medida positiva. Admita, ainda, $0 \leq \lambda\mu_1(m)$. Então $u \geq 0$ em Ω . Mais ainda, se $h > 0$ em um conjunto de medida positiva, então $u > 0$ em Ω .*

Prova: O problema é reescrito em sua forma fraca:

$$a(u, v) - \lambda \int muv = \int hv, \quad \forall v \in H_0^1. \quad (34)$$

Sem perda de generalidade, iremos admitir que $|m(x)| < 1$. (34) pode ser reescrito como

$$a_\lambda(u, v) = \lambda \int (m+1)uv + \int hv, \quad \forall v \in H_0^1. \quad (35)$$

onde $a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda \int uv$.

Dado $\lambda \geq 0$, denotemos por $\mu_{1,\lambda}$ o primeiro autovalor positivo de

$$\begin{cases} a_\lambda(u, v) = \mu \int (m+1)uv & \forall v \in H_0^1 \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (36)$$

Queremos provar que $0 \leq \lambda < \mu_1(m) \Rightarrow \lambda < \mu_{1,\lambda}$. Denotemos $\alpha = \mu_{1,\lambda}$. Suponha, por contradição, que $\alpha \leq \lambda$. Então

$$\frac{1}{\alpha} = \sup \frac{\int (m+1)v^2}{a(v, v) + \lambda \int v^2} \leq \sup \frac{\int (m+1)v^2}{a(v, v) + \alpha \int v^2}$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe um $v \in H_0^1$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} - \varepsilon \leq \frac{\int (m+1)v^2}{a(v, v) + \alpha \int v^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - \varepsilon \right) - \alpha \varepsilon \frac{\int v^2}{a(v, v)} \leq \frac{\int mv^2}{a(v, v)}$$

implicando que $\mu_1(m) \leq \alpha \leq \lambda < \mu_1(m)$, absurdo.

Denote por S_λ o operador definido de forma análoga à construção de S , no início desta seção, em relação à forma bilinear a_λ . Assim, (34) pode ser reescrito na forma

$$u = \lambda S_\lambda((m+1)u) + S_\lambda h.$$

Seja $W : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ o operador definido por $W(u) = \lambda S_\lambda((m+1)u)$. Este operador é compacto, devido à imersão compacta $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$.

Os autovalores de W são menores que 1. Com efeito, seja μ um autovalor de W . Logo, $\lambda S_\lambda((m+1)u) = \mu u$, donde $\lambda/\mu \int (m+1)uv = a_\lambda(u, v)$, ou seja, λ/μ é um autovalor para (36). Conseqüentemente, $\mu \leq \lambda/\mu_{1,\lambda} < 1$. Assim

$$u = (I - W)^{-1} S_\lambda h = \sum_{j=0}^{\infty} W^j(S_\lambda h) \quad (37)$$

e o fato de u ser positivo segue de que tanto S_λ quanto W são positivas. O último argumento do teorema segue direto do princípio do máximo forte. ■

A conclusão deste último teorema é forte, no sentido de que o problema (33) não pode ter uma solução positiva se $\lambda > \mu_1(m)$. Na verdade, temos a seguinte

Proposição 17 *Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$ uma solução de (33), onde $h \in L^{2^*}$ e $h \geq 0$ q.t.p. em Ω . Suponha que $m \in L^\infty(\Omega)$ é positiva em um conjunto de medida positiva, e $\lambda \geq \mu_1(m)$. Então se $u \not\equiv 0$ e $u(x) > 0$ para algum $x \in \Omega$, temos que $\lambda = \mu_1(m)$, $h = 0$ e $u = t\phi_1$, onde ϕ_1 é a autofunção de (23) associado a $\mu_1(m)$.*

Para a demonstração desta proposição, utilizamos a seguinte forma do princípio do máximo forte:

Proposição 18 *Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e suponha que $a(u, \psi) \leq 0$ para todo $\psi \in H_0^1(\Omega)$ com $\psi \geq 0$. Admita ainda que $\partial\Omega$ satisfaz a condição de esfera interior no ponto $x_0 \in \partial\Omega$. Então a derivada exterior normal $\partial u / \partial \nu(x_0)$ é estritamente positiva, se supormos u não constante em Ω e $u(x_0) \geq 0$. Esta última restrição torna-se desnecessária quando $a_0 \equiv 0$.*

Prova: Pela definição da condição de esfera interior em x_0 , seja $B_R(y) \subset \Omega$ uma bola aberta de raio R e centro y tal que $\{x_0\} = \partial B_R(y) \cup \partial\Omega$. Fixe $0 < \rho < R$ e considere a função auxiliar

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}, \quad r = |x - y|,$$

definida no anel $\Gamma = B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}$. α será escolhido adequadamente mais tarde. Seja ainda $\omega(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)$, para algum $\varepsilon > 0$ pequeno, em Γ . Supondo que u não é constante em Ω , segue, do princípio do máximo forte ([3] teorema 8.19, p. 188) que $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Gamma \setminus x_0$. Assim, temos $\omega(x) \leq 0$ sobre $\partial B_R(y)$ e, sobre $\partial B_\rho(y)$ podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $\omega(x) < 0$. Por outro lado, procedendo de forma análoga a ([3], p. 33) ao provar que $a(v, \psi) \leq 0$, podemos escolher $\alpha > 0$ de tal forma que $a(\omega, \psi) \leq 0$ para $\psi \in H_0^1$, com $\psi \geq 0$. Usando novamente o teorema 8.19 de [3], podemos concluir que $\omega(x) < 0$ em Γ . Dessa forma,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mu}(x_0) \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

■

Demonstração da Proposição 17: O problema (33) pode ser escrito na forma fraca dada por (35), da qual segue que $a_\lambda(u, v) \geq 0$ para todo $0 \leq v \in H_0^1$. A proposição 18 garante, então, que $u > t\phi_1$ para algum $t > 0$. Seja $t_0 = \sup\{t \geq 0 : u \geq t\phi_1\}$. Portanto, temos

$$a(t_0\phi_1, v) + \lambda \int t_0\phi_1 v = \mu_1(m) \int t_0\phi_1 v + \lambda \int t_0\phi_1 v \leq \lambda \int (m+1)t_0\phi_1 v,$$

para todo $0 \leq v \in H_0^1$. Subtraindo esta expressão de (35) e denotando $\omega = u - t_0\phi_1$, vemos que

$$a(\omega, v) + \lambda \int \omega v \geq \lambda \int (m+1)\omega v + \int h v, \quad \forall 0 \leq v \in H_0^1.$$

Aplicando novamente a Proposição 18, obtemos $\partial\omega/\partial\nu < 0$. Mas isto implica que, para $t' > 0$ suficientemente pequeno, $\omega > t'\phi_1 \Rightarrow u > (t_0 + t')\phi_1$, contradizendo a maximalidade de t_0 . ■

Finalmente, chegamos a um resultado de regularidade, impondo novas condições no problema (33).

Teorema 19 *Considere, além das hipóteses presentes no teorema 16, as seguintes condições:*

1. *Regularidade dos coeficientes de L e*
2. *$h \in L^p$ com $p > N$.*

Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\frac{\partial u}{\partial\nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$ se $h > 0$ num conjunto de medida positiva.

Prova: Utilizando um argumento de bootstrap padrão, concluímos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Se $h \in L^p(\Omega)$ com $p > N$ então Sh (definido no início desta seção) pertence a $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e a proposição 18 pode ser aplicada para concluirmos que $\frac{\partial}{\partial\nu}(Sh) < 0$ sobre $\partial\Omega$, se $h > 0$. Usando isto, vemos que o operador W (veja prova do Teorema 16) tem uma propriedade similar. Finalmente, o resultado segue de (37). ■

Referências Bibliográficas

- [1] Brezis, Haim, *Analyse Fonctionnelle théorie et applications*, MASSON, Paris, França (1983).
- [2] De Figueiredo, Djairo Guedes, *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, São Paulo (1981).
- [3] Gilbarg, D. - Trudinger, Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag (1977).
- [4] Grajeda, Leopoldo, *Teoria Geométrica dos Pontos Críticos*, Minas Gerais (2002).
- [5] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, USA (1978).
- [6] Lima, Elon Lages, *Espaços Métricos*, Impa, Rio de Janeiro (1977).
- [7] Sotomayor Tello, Jorge Manuel, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Impa, Rio de Janeiro - RJ (1942) .
- [8] Stampacchia, Guido, *Le Problème de Dirichlet pour les Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus*. Ann. Ins. Fourier 15 (1965), p. 189-258.