

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEORIA DOS PONTOS CRÍTICOS VIA MINIMIZAÇÃO

Rodrigo Alves de Oliveira Arruda

Bolsista pelo Programa Instituto do Milênio-AGIMB

João Marcos Bezerra do Ó

Orientador

João Pessoa, 02 de outubro de 2004

TEORIA DOS PONTOS CRÍTICOS VIA MINIMIZAÇÃO

MONOGRAFIA

Sumário

Introdução	3
Objetivo	3
Metodologia	4
Teoria dos Pontos Críticos Via Minimização	5
Funções Diferenciáveis à Fréchet e à Gâteaux	5
Multiplicadores de Lagrange em espaços de dimensão infinita	12
Funções semicontínuas inferiormente	16
Aplicação a um problema de Dirichlet	20
Referências Bibliográficas	27

INTRODUÇÃO

De um modo não muito formal, um problema de minimização básico para resolver é o seguinte: dados um funcional $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$, em que E é um espaço de Hilbert, e um conjunto fechado, convexo $C \subset E$ no qual, o funcional ϕ é limitado inferiormente, queremos encontrar $u_0 \in C$ de forma que

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in C} \phi(u).$$

Sabemos dos estudos de Cálculo Diferencial básico que dada uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada inferiormente em $C \subset \mathbb{R}$, esta não assume necessariamente o seu ínfimo em C (um exemplo seria a função exponencial $f(x) = e^x$). Disto, é perceptível adicionarmos hipóteses ao nosso problema inicial. Retornando mais uma vez ao Cálculo básico, temos o Teorema de Weierstrass que sob às condições de continuidade do funcional ϕ e da compacidade do conjunto C garante que o ínfimo é assumido. Um resultado análogo a este, porém bem mais geral, poderá ser visto na seção sobre funções semicontínuas inferiormente.

Neste trabalho, fizemos um estudo inicial sobre minimização. Iniciamos definindo derivadas no sentido de Fréchet e Gâteaux em espaços de Banach, em seguida resolvemos um problema usando os multiplicadores de Lagrange, depois obtemos alguns resultados sobre funções semicontínuas inferiormente e concluímos com uma aplicação a um problema de Dirichlet.

OBJETIVO

O objetivo do presente trabalho é a introdução aos métodos variacionais e topológicos em análise não-linear, em particular às técnicas de minimização de funcional.

O interesse pelo fato do ínfimo de um funcional ser assumido ou não é

que à certas classes de equações diferenciais não-lineares podemos associar um funcional que tem como propriedade o fato de um ponto crítico ser uma solução do problema. E recorreremos às técnicas de minimização na busca por estes pontos críticos.

METODOLOGIA

A metodologia adotada para a realização deste trabalho é a mesma que vem sendo utilizado ao longo de todo o projeto de iniciação científica apoiado pelo Instituto do Milênio - AGIMB:

1. Apresentação semanais de tópicos ao orientador.
2. Leituras de textos da bibliografia recomendada.
3. Discussão em grupo.
4. Apresentação de tópicos para outros bolsistas nos seminários semanais do Projeto Milênio.

Teoria dos Pontos Críticos Via Minimização

Funções Diferenciáveis à Fréchet e à Gâteaux

Nesta seção nós apresentaremos o conceito de diferenciabilidade em espaços de Banach: Derivada no sentido de Fréchet e Derivada no sentido de Gâteaux.

Uma extensão natural da derivada de uma função de uma variável é a derivada de Fréchet em espaços de Banach.

No que segue, $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ denotam espaços de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto, $f : U \rightarrow Y$ uma aplicação e $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos.

Observação 1 Usaremos a notação $r(h) = o(\|h\|_X)$ de uma aplicação $r : X \rightarrow Y$ se, e somente se,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

DERIVADA DE FRÉCHET

Definição 1 Seja x um ponto do conjunto aberto $U \subset X$. Uma aplicação $f : U \rightarrow Y$ é diferenciável à Fréchet em $x \in U$ se existe um operador linear $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$f(x+h) - f(x) - Ah = o(\|h\|).$$

O operador A é chamado de derivada de Fréchet da aplicação f em x e denotado por $Df(x)$ ou $f'(x)$. Se $f : U \rightarrow Y$ é diferenciável em todo ponto de U , então $Df : U \rightarrow L(X, Y)$ é chamada de derivada à Fréchet de f .

Apresentaremos agora algumas propriedades da derivada de Fréchet.

1. O operador $A = Df(x)$ é único.
2. Se $f : U \rightarrow Y$ é diferenciável à Fréchet em $x \in U$, então f é contínua em x .
3. Se $f : U \rightarrow Y$ é diferenciável à Fréchet segundo a norma $\|\cdot\|_X$, então f é diferenciável à Fréchet segundo qualquer norma equivalente a $\|\cdot\|_X$.
4. Se $f : U \rightarrow Y$ é diferenciável à Fréchet em $x \in U$, então $af + bg$, $a, b \in \mathbb{R}$, é diferenciável à Fréchet em $x \in U$ e

$$D(af + bg)(x)h = aDf(x)h + bDg(x)h.$$

5. Sejam $f : U \rightarrow Y$, $g : V \rightarrow Z$ aplicações com $V \subset Y$ e $f(U) \subset V$. Se f é diferenciável à Fréchet em $x \in U$ e g é diferenciável à Fréchet em $y = f(x)$, então $g \circ f$ é diferenciável à Fréchet em x e

$$D(g \circ f)(x)h = Dg(y)Df(x)h.$$

Exemplos de funções deriváveis no sentido de Fréchet

Seja H um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\|\cdot\|$.

1. O funcional $f : H \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, x \rangle = \frac{1}{2}\|x\|^2$$

é diferenciável à Fréchet e

$$f'(x)h = \langle x, h \rangle.$$

2. O funcional $f : H \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \|x\|$$

é diferenciável à Fréchet para $x \neq 0$ e

$$f'(x)h = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}.$$

3. O funcional $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$, onde $A \in \mathcal{L}(H, H)$ e $b \in H$, é diferenciável à Fréchet e

$$f'(x)h = \langle Ax + b, h \rangle.$$

4. Seja $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ uma aplicação $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$, onde B^T denota a matriz transposta da matriz B .

Então $A = f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e

$$A = f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Dado um funcional diferenciável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ temos $f'(x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$, onde X^* é o espaço dual de X .

Observação 2 Desde que fique claro no contexto, denota-se também por $\|\cdot\|$ a norma em X^* .

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. O Teorema da Representação de Riesz garante a existência única do elemento $u \in H$ tal que

$$F'(x)h = \langle u, h \rangle \quad \forall h \in H,$$

e denotaremos $u = \nabla F(x)$.

O operador $\nabla F : H \rightarrow H$ é chamado de operador gradiente do potencial $F : H \rightarrow \mathbb{R}$.

Muitas equações da Física-Matemática tem o operador da forma $F'(x) = 0$ em um espaço de Hilbert H apropriado. A equação $F'(x) = 0$ é dita como a equação de Euler-Lagrange do funcional $F : H \rightarrow \mathbb{R}$. Suas soluções são assumidas no sentido fraco, ou seja,

$$\langle \nabla F(x), h \rangle = 0 \quad \forall h \in H.$$

Portanto, soluções fracas são os pontos críticos do funcional $F : H \rightarrow \mathbb{R}$.

DERIVADA DE GÂTEAUX

Outro tipo de derivada de um funcional é a derivada direcional ou derivada de Gâteaux.

Definição 2 *Seja $F : U \rightarrow Y$ uma aplicação e $x \in U$. Dizemos que f é diferenciável à Gâteaux se existe o limite abaixo:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|F(x + th) - F(x)\|_Y}{t} = \frac{\partial F}{\partial h}(x) \quad \forall h \in X.$$

Um resultado imediato é que se F é diferenciável à Fréchet então é diferenciável à Gâteaux. A recíproca nem sempre é válida (ver Exemplo seguinte), porém mais na frente veremos as condições sob as quais a recíproca é válida.

Exemplo 1 *A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

é diferenciável à Gâteaux em $(0, 0)$, mas não é diferenciável à Fréchet em $(0, 0)$.

Prova: Primeiro mostremos que f é diferenciável à Gâteaux. Se $h = (h_1, h_2)$, $h_2 \neq 0$ temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(h_1^2 h_2)^2}{(t^2 h_1^4 + h_2^2)^2} = 0.$$

Se f é diferenciável à Fréchet em $(0, 0)$ devemos ter $f'(0, 0) = 0$. Porém, isto não é verdade, pois tomando $h = (h_1, h_1^2) \rightarrow (0, 0)$ temos

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(h) - f(0)|}{\|h\|} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \left(\frac{h_1^4}{h_1^4 + h_1^4} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{4} \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = +\infty.$$

■

Observação 3 *Uma função ser diferenciável à Gâteaux em um ponto x não implica que a função seja contínua em x . Um exemplo é a função*

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \\ 0 & \text{se } y \neq x^2 \end{cases}$$

que é diferenciável à Gâteaux em $(0, 0)$, mas não é contínua em $(0, 0)$.

Antes de enunciarmos o resultado mencionado anteriormente, denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X^* e X e $\lim_{j \rightarrow \infty}$ por $\lim_j$. Dizemos que $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ se é diferenciável à Fréchet em todo ponto x de U e a aplicação $x \mapsto f'(x)$ é contínua de U em X^* , isto é, se $\lim_j x_j = x \in U$ então

$$\lim_j \langle f'(x_j) - f'(x), v \rangle = 0,$$

uniformemente em $\{v \in X : \|v\| \leq 1\}$.

Enunciaremos alguns resultados básicos, cujas demonstrações podem ser encontradas em Elon [7].

Teorema 1 *Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tenha derivada de Gâteaux contínua em U . Então f é diferenciável à Fréchet e $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.*

Teorema 2 (Desigualdade do Valor Médio) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável à Gâteaux em U e $x_1, x_2 \in U$. Então*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \|D_G f(x_1 + t(x_2 - x_1))\| \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com medida finita. Denotemos por $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, o espaço de Lebesgue de funções integráveis.

Exemplo 2 O funcional $\varphi : L^{p+1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$,

$$\varphi(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x)|^{p+1} dx$$

é de classe $C^1(L^{p+1}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle \varphi'(u), h \rangle = \int_{\Omega} u(x) |u(x)|^{p-1} h(x) dx.$$

Prova: Pelo Teorema 1 é suficiente mostrar que existe φ'_G e é contínua.

Sejam $u, h \in L^{p+1}(\Omega)$ e $t \in [0, 1]$. Pelo Teorema 2, existe $\xi \in [0, 1]$ tal que

$$\frac{1}{(p+1)|t|} \left| |u(x)+th(x)|^{p+1} - |u(x)|^{p+1} \right| = |u(x)+t\xi h(x)|^p |h(x)| \leq \left(|u(x)| + |h(x)| \right)^p |h(x)|.$$

Da desigualdade de Hölder, segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(|u(x)| + |h(x)| \right)^p |h(x)| dx &\leq \left(\int_{\Omega} \left(|u(x)| + |h(x)| \right)^{p+1} dx \right)^{(p/p+1)} \left(\int_{\Omega} |h(x)|^{p+1} dx \right)^{(1/p+1)} \\ &\leq \left(2^p \int_{\Omega} (|u(x)|^{p+1} + |h(x)|^{p+1}) dx \right)^{(1/p+1)} \left(\int_{\Omega} |h(x)|^{p+1} dx \right)^{(1/p+1)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema IV.2 em [4]) temos

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_G(u), h \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(p+1)t} \int_{\Omega} |u(x) + th(x)|^{p+1} - |u(x)|^{p+1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u(x) + t\xi h(x)|^p \operatorname{sgn}(u(x) + t\xi h(x)) h(x) dx \\ &= \int_{\Omega} |u(x)|^p \operatorname{sgn} u(x) h(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u(x) |u(x)|^{p-1} h(x) dx. \end{aligned}$$

Para provar a continuidade de $\varphi'_G(u)$ precisamos mostrar que, se $\lim_j u_j = u$ em $L^{p+1}(\Omega)$, então

$$\lim_j \langle \varphi'_G(u_j) - \varphi'_G(u), v \rangle = 0 \quad \text{desde que } \|v\|_{L^{p+1}} \leq 1. \quad (1)$$

Pela continuidade do operador de Nemitskii (ver observação abaixo) $g : L^{p+1}(\Omega) \rightarrow L^{(p+1)/p}(\Omega)$

$$g(u) := u|u|^{p-1},$$

segue que

$$|\langle \varphi'_G(u_j) - \varphi'_G(u), v \rangle| \leq \|g(u_j) - g(u)\|_{L^{(p+1)/p}} \|v\|_{L^{p+1}} \rightarrow 0,$$

o que prova (1).

Observação 4 (Operador de Nemitskii) *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com medida finita, $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $1 \leq p, q < \infty$. O operador*

$$\mathcal{N}_f u(x) := f(x, u(x))$$

é chamado operador de Nemitskii.

Vejamos agora outro tipo de função. Dizemos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Carathéodory se:

1. Para cada $s \in \mathbb{R}$ fixo, a função $x \mapsto f(x, s)$ é mensurável à Lebesgue em Ω .
2. Para quase todo $x \in \Omega$, a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Observe que o operador de Nemitskii $u(x) \mapsto f(x, u(x))$ está bem definido no espaço das funções mensuráveis em Ω .

A observação seguinte resume algumas propriedades deste tipo de função.

Observação 5 *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Carathéodory. Então:*

1. *A função $x \mapsto f(x, u(x))$ é uma função mensurável para toda função mensurável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.*

2. Se Ω tem medida finita, o operador de Nemitskii $\mathcal{N}_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é contínuo, onde $\mathcal{M}$ é o espaço de valor real das funções mensuráveis em Ω , munido com a topologia de convergência em medida.
3. Se Ω é um domínio limitado e f satisfaz a condição de crescimento

$$|f(x, s)| \leq a|s|^{p-1} + b(x) \quad (2)$$

para $p > 1$, $a > 0$, $b \in L^q(\Omega)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então o operador de Nemitskii $\mathcal{N}_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ é contínuo.

4. Seja $\mathcal{N}_F$ o operador de Nemitskii associado à função

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$$

onde f satisfaz (2). Então $\mathcal{N}_F : L^p(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ é um operador contínuo. Além disso, $\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$ define um funcional continuamente diferenciável à Fréchet e $\mathcal{F}'(u) = \mathcal{N}_f$.

Multiplicadores de Lagrange em espaços de dimensão infinita

Nesta seção estabeleceremos o conceito de multiplicador de Lagrange e faremos uma aplicação sobre o mesmo.

No que segue, sejam X um espaço de Banach, $F \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de vínculo:

$$S := \{v \in X; F(v) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in S$, temos que $F'(u) \neq 0$ (Nesta seção denotamos $F'(u)$ como a derivada à Gateaux de f em u). Se $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$

(ou também sobre uma vizinhança de S ou $\mathcal{C}^1$ sobre S), dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é valor crítico de J sobre S se existe $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$J(u) = c \quad \text{e} \quad J'(u) = \lambda f'(u).$$

O ponto u é um ponto crítico de J sobre S e o número real λ é chamado multiplicador de Lagrange para o valor crítico c (ou para o ponto crítico u).

No caso em que X é um espaço funcional e a equação $J'(u) = \lambda f'(u)$ corresponde a uma equação diferencial parcial, dizemos que $J'(u) = \lambda f'(u)$ é a equação de Euler-Lagrange satisfeita pelo ponto crítico u sobre o vínculo S .

Esta definição é justificada por um resultado que estabelece a existência do multiplicador de Lagrange, onde utiliza-se o Teorema da Função Implícita para demonstrá-lo.

Proposição 1 *Sobre as hipóteses e notações da definição acima, suponhamos que $u_0 \in S$ é tal que $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$J'(u_0) = \lambda f'(u_0).$$

Observação 6 *É suficiente supor que u_0 seja um extremo local (mínimo ou máximo).*

APLICAÇÃO

Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $1 < p < 2^* - 1$. Consideremos sobre o espaço $H_0^1(\Omega)$:

$$S := \{v \in H_0^1(\Omega); f(v) = 0\},$$

onde

$$f(v) := \int_{\Omega} |v(x)|^{p+1} dx - 1$$

e

$$J(v) := \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Definamos $\mu := \min_{v \in S} J(v)$. Mostremos que existe $v_0 \in S$ tal que:

$$J(v_0) = \mu = \min_{v \in S} J(v).$$

De fato, consideremos uma seqüência minimizante (v_n) para μ . Pela desigualdade de Poincaré temos:

$$\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C,$$

onde C é uma constante.

Podemos supor que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e sabemos que

$$\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

onde

$$J(v_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \mu. \quad (3)$$

Agora, sabemos que $p+1 < 2^*$. Logo pelo Teorema de Rellich-Kondrachov

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega),$$

compactamente e, portanto, deduzimos que

$$v_n \rightarrow v_0 \quad \text{em } L^{p+1}(\Omega).$$

Em particular $f(v_0) = 0$, pois $f(v_n) = 0 \rightarrow f(v_0)$.

Concluimos que $v_0 \in S$ e pela definição de μ sabemos que

$$\mu \leq J(v), \quad \forall v \in S \quad \Rightarrow \quad \mu \leq J(v_0) \quad (4)$$

De (3) e (4) obtemos

$$\mu = J(v_0),$$

ou seja, μ é atingido em S .

Pela Proposição 1, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$J'(v_0) = \lambda f'(v_0), \quad \text{ou ainda} \quad J'(v_0) - \lambda F'(v_0) = 0,$$

daí

$$\int_{\Omega} (|\nabla v_0(x)|^2)' \cdot \psi(x) dx - \lambda \int_{\Omega} (|v_0(x)|^{p+1})' \cdot \psi(x) dx = 0, \quad \psi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} 2\nabla v_0(x) \nabla \psi(x) dx - \lambda(p+1) \int_{\Omega} |v_0(x)|^{p-1} \cdot v_0(x) \cdot \psi(x) dx = 0$$

$$\int_{\Omega} [-2\Delta v_0(x) - \lambda(p+1)|v_0(x)|^{p-1} \cdot v_0(x)] \cdot \psi(x) dx = 0$$

$$-2\Delta v_0 - \lambda(p+1)|v_0|^{p-1}v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\Delta v_0 = \lambda(p+1)|v_0|^{p-1}v_0. \quad (5)$$

Multiplicando por v_0 , obtemos

$$-2\Delta v_0 \cdot v_0 = \lambda(p+1)|v_0|^{p-1} \cdot v_0^2.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -2\Delta v_0 \cdot v_0 &= \lambda(p+1) \int_{\Omega} |v_0|^{p-1} \cdot v_0^2 \\ 2 \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla v_0 &= \lambda(p+1) \int_{\Omega} |v_0|^{p-1} |v_0|^2 = \lambda(p+1) \int_{\Omega} |v_0|^{p+1} \end{aligned}$$

$$2J(v_0) = \lambda(p+1)(F(v_0) + 1) = \lambda(p+1) = 2\mu \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\mu}{p+1}.$$

Substituindo em (5):

$$-2\Delta v_0 = \frac{2\mu}{p+1}(p+1)|v_0|^{p-1}v_0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta v_0 = \mu|v_0|^{p-1}v_0,$$

no sentido de $D'(\Omega)$.

Como $\mu > 0$, então temos que $u := \mu^{(1/p-1)}v_0$ é uma solução não nula da equação

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

■

Funções semicontínuas inferiormente

Seja X um espaço topológico. Dizemos que $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente (ou simplesmente s.c.i.) se $\phi^{-1}(a, +\infty)$ é aberto em X , qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ (ou ainda, $\phi^{-1}(-\infty, a]$ é fechado em $X \forall a \in \mathbb{R}$). Em particular, se X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade então $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é s.c.i. se, e somente se, $\phi(\hat{u}) \leq \liminf \phi(u_n)$ para qualquer $\hat{u} \in X$ e seqüência u_n convergindo para $\hat{u}$.

Observação 7 *Um espaço topológico satisfaz o o primeiro axioma da enumerabilidade se para todo x em X existe uma seqüência $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças abertas de x tal que dada uma vizinhança U de x , existe U_n com $x \in U_n \subset U$.*

Teorema 3 *Seja X um espaço topológico compacto e seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional s.c.i. Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\phi(u_0) = \inf_X \phi.$$

Prova: Podemos escrever $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^{-1}(-n, +\infty)$. Cada conjunto $\phi^{-1}(-n, +\infty)$ é aberto e X é compacto, então

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} \phi^{-1}(-n, +\infty),$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, logo $\phi(u) > -n_0$ para todo $u \in X$, de onde concluímos que ϕ é limitado inferiormente.

Seja $c = \inf_X \phi > -\infty$ e suponha, por absurdo, que $\phi(u) > c \quad \forall u \in X$. Então $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^{-1}(c + \frac{1}{n}, +\infty)$ e novamente, por compacidade de X , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(u) > c + \frac{1}{k}$ para todo $u \in X$, logo $c + \frac{1}{k} \leq c$ o que é absurdo. Portanto, o ínfimo deve ser atingido. ■

Uma conseqüência deste teorema é o resultado seguinte, que representa uma síntese do chamado Método Direto do Cálculo das Variações.

Teorema 4 *Seja E um espaço de Hilbert (ou um espaço de Banach reflexivo) e suponha que um funcional $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínuo*

inferiormemente e coercivo. Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_E \phi.$$

Observação 8 1. $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínuo inferiormente (fracamente s.c.i.) se ϕ é s.c.i. considerando E com a topologia fraca.

2. $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é coercivo se $\phi(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow +\infty$.

Prova: Pela coercividade, escolhemos $R > 0$ tal que $\phi(u) \geq \phi(0)$ para todo $u \in E$ com $\|u\| \geq R$. Uma vez que a bola fechada $\bar{B}_R(0)$ é compacta na topologia fraca e, pela hipótese de fracamente s.c.i., a restrição $\phi : \bar{B}_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ é s.c.i. na topologia fraca, do Teorema 3 temos a existência de $u_0 \in \bar{B}_R(0)$ tal que $\phi(u_0) = \inf_{\bar{B}_R(0)} \phi$, daí $\phi(u_0) = \inf_E \phi$ pela escolha de R . ■

Se o funcional, além das condições deste último teorema, é diferenciável, então qualquer ponto de mínimo u_0 é um ponto crítico de ϕ , ou seja, $\phi'(u_0) = 0 \in E^*$.

Uma outra consequência do Teorema 3 responde à questão do problema de minimização mencionado na introdução desta monografia.

Teorema 5 Sob as hipótese de fracamente s.c.i. e coercividade do teorema anterior, dado um conjunto fechado, convexo $C \subset E$, existe $\hat{u} \in C$ tal que $\phi(\hat{u}) = \inf_C \phi$.

Prova: A demonstração é uma repetição do teorema anterior. Neste caso, $R > 0$ é escolhido de maneira que $\phi(u) \geq \phi(p)$ para todo $u \in C$ com $\|u\| \geq R$, onde $p \in C$ é um ponto fixado. Substituindo $\bar{B}_R(0)$ por $\bar{B}_R(0) \cap C$ e lembrando que um conjunto fechado, convexo e limitado é fracamente compacto, obtemos o resultado desejado. ■

Exemplo 3 Sejam E um espaço de Hilbert, $a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua satisfazendo $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$ para todo $u \in E$, algum $\alpha > 0$ e $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Considere o funcional "quadrático" definido por

$$\phi(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u) \quad u \in E.$$

Então, dado um conjunto "admissível" C , isto é, um subconjunto fechado e convexo $C \subset E$, o problema de minimização clássico

$$\phi(\hat{u}) = \inf_{u \in C} \phi(u),$$

tem solução única $\hat{u} \in C$.

Prova: A existência de $\hat{u} \in C$ é assegurada pelo Teorema 5, bastando notar que o funcional ϕ , por ser contínuo e convexo, é fracamente s.c.i. (este resultado será visto mais adiante).

Neste caso a unicidade segue da convexidade estrita de ϕ . Na situação especial em que $a(u, v) = \langle u, v \rangle$ temos

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \langle u, h \rangle \quad u \in E,$$

e é fácil ver que o ponto $\hat{u} \in C$ tem a caracterização geométrica de ser a projeção de h sobre o conjunto convexo C :

$$\hat{u} = Proj_C h .$$

■

EXEMPLOS DE FUNCIONAIS FRACAMENTE S.C.I.

Exemplo 4 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e seja $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições de Carathéodory e a seguinte condição de crescimento:

1. Existem $a, b \geq 0$ e $1 \leq \alpha < \frac{2N}{(N-2)}$ se $N \geq 3$ [$1 \leq \alpha < \infty$ se $N = 1, 2$] tais que

$$|f(x, s)| \leq a|s|^\alpha + b.$$

Então o funcional

$$\psi(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x)) dx$$

está bem definido e é fracamente contínuo no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Prova: Já vimos que o operador de Nemitskii $u(x) \mapsto f(x, u(x))$ está bem definido no espaço das funções mensuráveis em Ω , portanto, ψ está bem definido. Por outro lado, sabemos que o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$ para qualquer $1 \leq p < 2N/(N-2)$, em vista do Teorema de Imersão de Sobolev, e a condição de crescimento implica que o operador de Nemitskii leva o espaço $L^p(\Omega)$, com $p \geq \alpha$ no espaço $L^{p/\alpha}(\Omega)$ de um modo contínuo. Daí, se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ então $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^p(\Omega)$ (para $1 \leq p < 2N/(N-2)$). Pela continuidade do operador de Nemitskii, segue-se que

$$f(., u_n) \rightarrow f(., u) \text{ fortemente em } L^{p/\alpha}.$$

Como $1 \leq \frac{p}{\alpha}$ temos

$$f(., u_n) \rightarrow f(., u) \text{ fortemente em } L^1(\Omega),$$

isto é,

$$\psi(u_n) \rightarrow \psi(u) \text{ sempre que } u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega).$$

Logo, ψ é fracamente contínua em $H_0^1(\Omega)$. ■

Exemplo 5 Se $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional convexo e s.c.i. no espaço de Banach reflexivo E então ϕ é fracamente s.c.i. .

Prova: É conveniente introduzirmos a idéia de epigráfico de ϕ :

$$\text{epi}(\phi) = \{(u, a) \in E \times \mathbb{R} : \phi(u) \leq a\}.$$

Utilizando as seguintes equivalências:

1. ϕ é convexo se, e somente se, $\text{epi}(\phi)$ é convexo.
2. ϕ é s.c.i. se, e somente se, $\text{epi}(\phi)$ é fechado.
3. ϕ é fracamente s.c.i. se, e somente se, $\text{epi}(\phi)$ é fracamente fechado.

E lembrando do fato que um conjunto convexo, fechado de um espaço de Banach reflexivo é fracamente fechado, obtemos o resultado desejado. ■

Aplicação a um problema de Dirichlet

Vamos agora considerar o seguinte problema de Dirichlet não linear:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) é um domínio limitado e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo as condições de Carathéodory e a seguinte condição de crescimento:

1. Existem $c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ [$0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2$] tais que

$$|f(x, s)| \leq c|s|^\sigma + d.$$

Nosso objetivo é encontrar *soluções fracas de (6)*, isto é, funções $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} [\nabla u \nabla h - f(x, u)h] dx = 0 \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Aqui, vamos considerar o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ com seu produto interno usual

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

e definir o funcional $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ pela fórmula

$$I(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u) \right] dx \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.

Vamos considerar também o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Observação 9 *A norma acima é equivalente à norma usual*

$$\|u\| = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

em virtude da desigualdade de Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

(veja em Brezis [4]).

Proposição 2 *Suponha que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e a condição de crescimento do Exemplo 4. Então o funcional $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ acima, associado ao problema (6), está bem definido. Além disso, I é de classe $\mathcal{C}^1(H_0^1, \mathbb{R})$ com*

$$I'(u)h = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla h - f(x, u)h) dx \quad \forall u, h \in H_0^1(\Omega).$$

Prova: Pela desigualdade de Poincaré anteriormente mencionada, podemos escrever

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \psi(u), \quad \psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

Provemos então o seguinte:

(a) I está bem definido

É claro que o funcional $\rho(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2$ está bem definido em $H_0^1(\Omega) \forall u$. Portanto, basta verificar que o funcional ψ está bem definido.

De fato, como a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e a condição de crescimento do Exemplo 4, então a função $F(x, s)$ também satisfaz as mesmas condições. Portanto, novamente pelo Exemplo 4 temos que ψ está bem definido. Portanto, I está bem definido.

(b) I é de classe $\mathcal{C}^1$ em $H_0^1(\Omega)$

Como o funcional $\rho(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2$ é claramente de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $H_0^1(\Omega)$, basta verificar que ψ é de classe $\mathcal{C}^1$ em $H_0^1(\Omega)$.

Mostremos que:

(i) ψ é diferenciável

De fato, fixado $u \in H_0^1(\Omega)$, defina:

$$\begin{aligned}\delta(h) &= \psi(u+h) - \psi(u) - \int_{\Omega} f(x, u)h \, dx \\ &= \int_{\Omega} [F(x, u+h) - F(x, u)]dx - \int_{\Omega} f(x, u)h \, dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}\delta(h) &= \int_{\Omega} \left[\int_0^1 \frac{d}{dt} (F(x, u+th)) dt \right] dx - \int_{\Omega} \left(\int_0^1 f(x, u)h \, dt \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_0^1 (f(x, u+th)h - f(x, u)h) dt \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_0^1 (f(x, u+th) - f(x, u))h \, dt \right] dx \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} (f(x, u+th) - f(x, u))h \, dx dt.\end{aligned}$$

Tomando módulo em ambos os membros, temos

$$|\delta(h)| \leq \int_0^1 \left| \int_{\Omega} [f(x, u+th) - f(x, u)]h \, dx \right| dt.$$

Por Hölder, temos

$$\begin{aligned}|\delta(h)| &\leq \int_0^1 \left| \left(\int_{\Omega} |f(x, u+th) - f(x, u)|^r \right)^{1/r} \left(\int_{\Omega} |h|^s \right)^{1/s} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \|f(x, u+th) - f(x, u)\|_{L^r(\Omega)} \|h\|_{L^s(\Omega)} dt \\ &= \|h\|_{L^s(\Omega)} \int_0^1 \|f(x, u+th) - f(x, u)\|_{L^r(\Omega)} dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{|\delta(h)|}{\|h\|} \leq \int_0^1 \|f(x, u+th) - f(x, u)\|_{L^r(\Omega)} dt. \quad (7)$$

Aqui $r = \frac{2N}{N+2}$ e $s = \frac{2N}{N-2} = 2^*$ (Estamos considerando o caso $N \geq 3$. Os casos $N = 1, 2$ são analisados de modo separado).

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ (imersão de Sobolev), então, obtemos que

$$h \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \implies u + th \rightarrow u \text{ em } L^s(\Omega).$$

Agora usando o fato que a aplicação $s \rightarrow f(., s)$ leva o espaço $L^p(\Omega)$ no espaço $L^{p/\sigma}(\Omega) \forall \sigma \leq p$ de forma contínua, temos

$$f(x, u + th) \rightarrow f(x, u) \text{ em } L^{s/\sigma},$$

para $1 \leq \sigma \leq s = 2^*$.

Agora, como $r = \frac{2N}{N+2} < \frac{s}{\sigma}$, segue-se que:

$$f(x, u + th) \rightarrow f(x, u) \text{ em } L^r.$$

Logo,

$$\|f(x, u + th) - f(x, u)\|_{L^r} \rightarrow 0.$$

Portanto, aplicando limite quando $h \rightarrow 0$ em (7) e usando o Teorema de Lebesgue, temos

$$\frac{|\delta(h)|}{\|h\|} \leq \int_0^1 \|f(x, u + th) - f(x, u)\|_{L^r} dt \rightarrow 0.$$

Segue daí,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\delta(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(u + h) - \psi(u) - \int_{\Omega} f(x, u) h dx}{\|h\|} = 0.$$

Mostramos assim que $\psi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável à Fréchet.

(ii) ψ' é contínua

De fato, considere $\psi' : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, então,

$$\begin{aligned} \|\psi'(u + v) - \psi'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|h\| \leq 1} \left| [\psi'(u + v) - \psi'(u)]h \right| \\ &= \sup_{\|h\| \leq 1} \left| \psi'(u + v)h - \psi'(u)h \right| \\ &= \sup_{\|h\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} [f(., u + v) - f(., u)]h \right| \\ &\leq \sup_{\|h\| \leq 1} \|f(., u + v) - f(., u)\|_{L^r} \|h\|_{L^s} \end{aligned}$$

onde $r = \frac{2N}{N+2}$ e $s = \frac{2N}{N-2} = 2^*$.

Prosseguindo de modo análogo ao ítem (i), teremos que :

$$f(., u + th) \rightarrow f(., u) \text{ em } L^r.$$

Donde,

$$\|f(., u + th) - f(., u)\|_{L^r(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quando } v \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\|\psi'(u + v) - \psi'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quando } v \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\psi'(u + v) \rightarrow \psi'(u) \text{ quando } (u + v) \rightarrow u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Logo, ψ' é contínua.

Portanto, $I \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega))$.

(c) Provemos que

$$I'(u)h = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla h - f(x, u)h) dx \quad \forall u, h \in H_0^1(\Omega).$$

Temos que

$$\begin{aligned} I'(u)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + th) - I(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + th)|^2 - \int_{\Omega} [F(x, u + th) - F(x, u)] - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + t \nabla u \nabla h + \frac{t^2}{2} |\nabla h|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] - \int_{\Omega} [F(x, u + th) - F(x, u)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \int_{\Omega} \nabla u \nabla h + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 - \int_{\Omega} [F(x, u + th) - F(x, u)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \nabla h + \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 - \int_{\Omega} \left[\frac{F(x, u + th) - F(x, u)}{t} \right] \right\} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla h - \int_{\Omega} f(x, u)h \end{aligned}$$

Ou seja,

$$I'(u)h = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla h - f(x, u)h) dx \quad \forall u, h \in H_0^1(\Omega).$$

■

Observação 10 Temos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (6) se, e somente se, u é um ponto crítico de I .

Apresentamos a seguir um teorema relacionado com o problema colocado no início desta seção.

Teorema 6 Suponha que $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo as condições:

1. Existem $c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ [$0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2$] tais que

$$|f(x, s)| \leq c|s|^\sigma + d.$$

2. Existe $\beta < \lambda_1$ tal que $\limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \beta$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Então (6) possui uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$.

Prova: Em vista da Proposição 2, vamos encontrar um ponto crítico do funcional $\phi \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ dado por

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \psi(u), \quad \psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u)dx.$$

Como sabemos, $q(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ é fracamente s.c.i. e ψ é fracamente contínuo. Portanto

(a) ϕ é fracamente s.c.i.

Por outro lado, a condição (2) da hipótese implica que

$$(2') \quad \limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \beta \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega,$$

e portanto, fixando β_1 com $\beta < \beta_1 < \lambda_1$, obtemos R_1 tal que $F(x, s) \leq \frac{1}{2}\beta_1 s^2$ para todo $x \in \Omega$ e $|s| \geq R_1$. E como a condição (1) fornece $F(x, s) \leq \gamma_1$ para todo $x \in \Omega$ e $|s| \leq R_1$, nós obtemos a estimativa

$$F(x, s) \leq \frac{1}{2}\beta_1 s^2 + \gamma_1 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Esta implica a seguinte estimativa por baixo para ϕ

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\beta_1 \int_{\Omega} u^2 dx - \gamma_1 |\Omega|,$$

a qual, com a Desigualdade de Poincaré , fornece

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta_1}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \gamma = \frac{1}{2} a \|u\|^2 - \gamma,$$

onde $a = 1 - \frac{\beta_1}{\lambda_1} > 0$. Logo

(b) ϕ é coercivo em H_0^1

Finalmente, por (a), (b) e pelo Teorema 4, segue que existe $u_0 \in H_0^1$ tal que $\phi(u_0) = \inf_{H_0^1} \phi$. Portanto u_0 é um ponto crítico de ϕ e a demonstração está completa. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Mawhin, Jean & Willem, Michel. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, EUA (1989).
- [2] Grossinho, Maria do Rosário & Tersian, Stepan Agop. *An Introduction to Minimax Theorems and their Applications to Differential Equations*, Kluwer Publishers, Dordrecht, Holanda (2001).
- [3] Costa, David Goldstein. *Tópicos em Análise Não-Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, Brasil (1986).
- [4] Brezis, Haim. *Analyse Fonctionnelle théorie et applications*, MASSON, Paris, França (1983).
- [5] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, EUA (1978).
- [6] Lima, Elon Lages. *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil (1977).
- [7] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise - Vol. 2*, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil (1981).