

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PLANO DE TRABALHO  
PARA O BOLSISTA

MEDIDA E INTEGRAÇÃO

PIBIC-CNP<sub>q</sub>-IM-AGIMB-2004

# IDENTIFICAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO

1. TÍTULO DO PLANO DE TRABALHO:

*Medida e Integração*

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

*Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I*

3. ÁREA DE PESQUISA:

*Análise*

4. SUB-ÁREAS DE PESQUISA:

*Equações Diferenciais Parciais*

5. ORIENTADOR:

*Prof. Everaldo Souto Medeiros*

6. COORIENTADOR:

*Prof. Gilmar Otávio Correia*

6. ORIENTANDO:

*Manassés Xavier de Souza*

7. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

*Março de 2004 a Dezembro de 2004*

# INTRODUÇÃO

De acordo com o nosso grande objetivo que é a formação de recurso humano, queremos aqui neste projeto, abrir de fato caminho para uma futura pós-graduação.

O projeto foi elaborado tendo em vistas o estágio em que se encontra o candidato-bolsista, 2 anos para a conclusão de graduado.

Queremos portanto, desenvolver um estudo compacto e objetivo nestes dez meses, necessário para a preparação e aprofundamento em análise e disciplinas afins, particularmente a teoria de medida e integração.

Estaremos interessados nas demonstrações dos resultados fundamentais da Análise, como o teorema de Riesz-Markov e outros fatos geralmente omitidos nos textos destinados aos iniciantes; porém são ferramentas e técnicas básicas para a formação em Análise.

Outra preocupação é fazer o aluno vislumbrar a dimensão da generalidade com que valem alguns conceitos e resultados da análise, sua dinâmica na justificativa de seus resultados, enquanto teoria e na sua aplicabilidade em outras ciências.

## OBJETIVOS DO PLANO DE TRABALHO

Nosso objetivo é desenvolver um estudo compacto e objetivo nestes dez meses, necessário para a preparação e aprofundamento em análise e disciplinas afins.

## METODOLOGIA

Faremos também uso da **metodologia** tradicional, a qual tem sido feita com sucesso nas iniciações à pesquisa em matemática, isto é, realizações de seminários semanais com lista de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

# DETALHAMENTO DO PLANO DE TRABALHO

Para atingir nosso objetivo, precisaremos seguir uma trilha que vai da introdução histórica a “Teoria de Medida Integração” a sua apresentação moderna que se encontra nos textos atuais. O detalhamento do nosso projeto pode ser lido a seguir.

1. Medidas em semi-anéis e anéis
  - (a) Medidas positivas
  - (b) Medidas regulares
  - (c) Medidas  $\sigma$ -aditivas
2. Extensão de medidas
  - (a) Funções simples
  - (b) Integral Superior
  - (c) O teorema de extensão de medidas
3. Os Teoremas de Convergência de Lebesgue
  - (a) Funções mensuráveis
  - (b) Convergência Monótona
  - (c) Convergência Dominada
4. Integrais Indefinidas, Medidas com Sinal e Complexas
  - (a) Integrais Indefinidas
  - (b) Medidas com Sinal
  - (c) Medidas Complexas
  - (d) O teorema de Radon-Nikodym
5. O Teorema da Decomposição de Lebesgue
  - (a) O Espaço  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$
  - (b) Os subespaços  $\mathcal{M}_a(\mu)$  e  $\mathcal{M}_s(\mu)$
6. Espaços  $\mathcal{L}^p$

- (a) Densidade das funções simples em  $\mathcal{L}^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ 
    - i. Comentários sobre a não-densidade das funções em  $\mathcal{L}^\infty$
  - (b) Dualidade entre  $\mathcal{L}^p$  e  $\mathcal{L}^q$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
7. Convergência de sequências de funções
- (a) Convergência quase uniforme
  - (b) Convergência em Medida
  - (c) Quadro de Convergências
8. Medidas-produto
- (a) Classes  $\sigma$ -aditivas e  $\sigma$ -álgebras
  - (b) O teorema de Tonelli-Cavalieri
  - (c) Os teoremas de Fubini
9. Transporte de medidas e medidas invariantes
- (a) Aplicações mensuráveis e Medidas-imagem
  - (b) O teorema de recorrência de Poincaré
10. Medidas borelianas em espaços localmente compactos
- (a) Densidade das funções contínuas em  $\mathcal{L}^p(\mu)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\mu$  regular
  - (b) O teorema de representação de Riesz-Markov
11. Derivação e Integração
- (a) Derivadas de medidas
  - (b) O teorema de derivação de Lebesgue
  - (c) O teorema fundamental do Cálculo

## Cronograma de Execução

O conteúdo deste plano será executado em duas etapas descritas a seguir:

**Primeira Etapa:** março a julho de 2004.

Estudaremos: Medidas em semi-anéis e anéis; Extensão de medidas; Os Teoremas de Convergência de Lebesgue; Integrais Indefinidas, Medidas com Sinal e Complexas; O Teorema de Decomposição de Lebesgue.

**Segunda Etapa:** agosto a dezembro de 2004.

Estudaremos: Espaços de Lebesgue; Convergências de sequências de funções; Medidas-produto; Transporte de medidas e medidas invariante; Medidas borelianas em espaços localmente compactos; Derivação e Integração.

## References

- [1] Augusto Armando de Castro Júnior, Medida e Integração, preprint 2002
- [2] Isnard, Carlos S., Curso de Medida, Preprint/IMPA, 2000.
- [3] Bartle, Robert G.; The Elements of Integration, John Wiley & Sons, New York (1966)
- [4] Royden, H.L.; Real Analysis, Prentice Hall, 1988.
- [5] Halmos, Paul R.; Measure Theory, Springer-Verlag, NY, 1974.
- [6] Fernandes, Pedro Jesus; Medida e integrao, Publicao IMPA, 1996.
- [7] Weir, A. J.; Lebesgue Integration and Mesure, Cambridge University Press, 1973