UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Relatório Final

INICIAÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA GEOMÉTRICA DOS PONTOS CRÍTICOS

Bruno Henrique C. Ribeiro
Bolsista pelo Programa PIBIC/UFPB/CNPq

Joao Marcos Bezerra do Ó
Orientador

João Pessoa, 08 de agosto de 2004

IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

1. TÍTULO DO PROJETO:

   Iniciação ao Estudo da Teoria Geométrica dos Pontos Críticos

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

   Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I

3. ÁREA DE PESQUISA:

   Análise

4. SUB-ÁREAS DE PESQUISA:

   Equações Diferenciais Parciais e Geometria Diferencial

5. ORIENTADOR:

   Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

6. COORIENTADOR:

   Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

6. ORIENTANDO:

   Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

7. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

   agosto de 2003 a julho de 2004

João Marcos Bezerra do Ó
Orientador

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro
Aluno

INTRODUÇÃO

Este trabalho é um resumo das atividades exercidas pelo bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica, PIBIC/CNPq/UFPB entre agosto de 2003 e julho de 2004. Serão aqui exibidos: uma exposição introdutória do projeto; seus objetivos; metodologia e finalmente, o conteúdo pesquisado e desenvolvido. O relatório termina com a informação de toda a bibliografia utilizada. Em anexo segue cópia do cronograma do projeto. Eis um resumo inrodutório deste trabalho :

Tentativas de explicar fenômenos físicos, através do príncipio de que existe na natureza alguma "quantidade" a ser minimizada, motivou desde tempos remotos (c. 125 aC) à formulação de um princípio variacional.

Registro de uma formulação efetiva só tivemos a partir do sec. XVII, quando Pierre de Fermat postulou que a "luz minimiza o tempo transcorrido ao invés da distância percorrida". Daí deduziu-se matematicamente as leis que descrevem o fenômeno da refração da luz, abrindo as portas para que outros pesquisadores estabelecessem as ferramentas matemáticas necessárias para a abordagem de problemas variacionais mais complexos. Surge então o início do desenvolvimento da teoria Clássica do Cálculo das Variações.

Mas foi o suíço Leonhard Euler quem primeiro escreveu e publicou um trabalho sobre o Cálculo das Variações. Trabalho este que influenciou gerações de destacados matemáticos até os dias de hoje.

Seguindo Euler, Maupertius publicou um trabalho onde pela primeira vez aparece o princípio da "ação mínima". E na sequência citamos Louis de Lagrange, Le Gendre, Karl Jacobi e Hamilton, matemáticos que consolidaram o Cálculo das Variações.

Atualmente, o Cálculo das Variações é tema de inúmeros trabalhos de renomados matemáticos. Sua aplicabilidade em várias ciências como Biologia, Economia e Engenharia tem atraído muitos talentos para a pesquisa em Matemática. A beleza e as técnicas utilizadas no Cálculo das Variações têm colaborado de forma prática e objetiva nos trabalhos de iniciação científica.

O objetivo e conteúdo específico do projeto destacamos a seguir.

OBJETIVOS DO PROJETO

Do ponto de vista específico da pesquisa, nosso objetivo principal é a compreensão geométrica do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz utilizando a idéia geométrica de Minimax e o lema da Deformação.

Para isto, fizemos uma rápida introdução aos Métodos Variacionais modernos com forte ênfase na interpretação geométrica dos resultados listados no conteúdo do projeto, observando sempre as técnicas de demonstração com todo rigor matemático.

METODOLOGIA

Fizemos também uso da **metodologia** tradicional, a qual tem sido feita com sucesso nas iniciações à pesquisa em matemática, isto é, realizações de seminários semanais com lista de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

CONTEÚDO DESENVOLVIDO

De acordo com o cronograma elaborado no plano de trabalho deste projeto de iniciação científica, o aluno trabalhou os tópicos abaixo listados:

1. Introdução aos Métodos Variacionais
   (a) O Cálculo das Variações
   (b) O Princípio da Ação Mínima
   (c) O Princípio de Dirichlet
   (d) Do clássico ao Moderno
   (e) O Método Variacional
2. Espaços de Funções
   (a) Introdução
   (b) Derivadas Fracas
   (c) Espaços de Sobolev
   (d) Solução Fraca
3. O Método Variacional Direto
   (a) A Forma Fraca do Princípio de Dirichlet
   (b) O Caso de Dimensão Finita
   (c) O Problema da Compacidade
   (d) Semicontinuidade Inferior
   (e) A Desigualdade de Poincaré
   (f) A Solução Fraca do Problema de Dirichlet
4. O Teorema do Passo da Montanha
   (a) Os métodos *Minimax*
   (b) A Geometria do Passo da Montanha
   (c) A Condição de Palais-Smale
   (d) O Lema da Deformação
   (e) A Prova do Teorema do Passo da Montanha

5. Princípios Variacionais de Ekeland
6. Identidades Variacionais
    (a) Motivação - Teorema Virial
    (b) Identidade de Pohozaev em Domínios Limitados
    (c) Identidade de Pohozaev em Domínios não-limitados
    (d) Aplicações
    (e) Apêndice

Capítulo 1

Introdução aos Métodos Variacionais

1.1 O Cálculo das Variações

O primeiro indício histórico de formulação de um princípio variacional deve-se a Heron de Alexandria (c. 125 a.C.), que postulou que a luz segue sempre o caminho mais curto entre dois pontos e estabeleceu as leis para a reflexão da luz em espelhos. A idéia central de seu trabalho é de que a luz minimiza a distância percorrida entre a fonte e o observador. Essa teria sido a primeira tentativa de se explicar fenômenos físicos através do princípio de que existe na natureza alguma quantidade (no caso a distância) a ser minimizada.

Mas foi somente na primeira metade do século XVII que se pode dizer que um princípio variacional foi de fato utilizado, quando Pierre de Fermat postulou que, em seu trajeto, a luz minimizaria o tempo transcorrido ao invés da distância percorrida e, a partir deste princípio, deduziu matematicamente as leis que descrevem o fenômeno da refração da luz, obtidas experimentalmente pelo holandês Willebrod Snell poucos anos antes.

Apesar do sucesso de Fermat no estudo da refração da luz, ainda não havia sido estabelecida toda a maquinaria matemática necessária para abordar problemas variacionais mais complexos. Contudo, o advento do Cálculo na segunda metade do século XVII abriu o caminho para o pleno desenvolvimento da teoria clássica do Cálculo das Variações.

Apenas em 1743 que surgiu o primeiro tratado sobre o Cálculo das Variações. Naquele ano, o suiço Leonhard Euler submeteu ao editor um livro (cujo título poderia ser traduzido como "Método para encontrar curvas que minimizam ao máximo a propriedade da folga ou soluções para problemas isoperimétricos aceitas no sentido amplíssimo"). Este livro foi um marco na história da Matemática e inspirou inúmeras gerações de matemáticos ao longo dos séculos.

Em 1744, mesmo ano em que o livro de Euler foi publicado, o francês Pierre-Louis Maupertius publicou seu aclamado trabalho *Accord de Différentes Lois de la Nature que Avaient Jusqu'ici Paru Imcompatibles*, onde pela primeira vez aparece o princípio da ação mínima . Entretanto, ao que tudo indica, Euler teria sido o primeiro a compreender realmente toda a relevância deste princípio.

Após os pioneiros trabalhos de Euler e Maupertius na primeira metade do século XVIII, grandes matemáticos, como Louis de Lagrange, Adrien-Marie Le Gendre, Karl Jacobi e Willlian Rowan Hamilton contribuíram decisivamente para consolidar o Cálculo das Variações.

1.2 O Princípio da Ação Mínima

Uma aplicação clássica do Cálculo das Variações é a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias através da minimização do funcional da ação.

Considere uma função $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Fixados dois pontos $P, Q \in \mathbb{R}^N$ e um tempo $T > 0$, definimos o funcional

$$I(v) = \int_0^T L[v(s), v(s)]ds$$

onde $v : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ pertence à classe

$$A = \{v \in C^2([0, T], \mathbb{R}^N) \mid v(0) = P \ e \ v(T) = Q\}$$

A função L é chamada de Lagrangiana e o funcional I, de ação.

A idéia central do Cáluclo das Variações é que, se $\mathbf{x} \in A$ minimiza a ação, i.e., se

$$I(\mathbf{x}) = \inf_{v \in A} I(v)$$

então $\mathbf{x}$ é solução do sistema de equações de Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{ds}\nabla_x L[\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s)] + \nabla_y L[\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s)] = 0$$

onde $0 \le s \le T$ e usamos a notação $L = L(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Assim, para provar a existência de solução para o sistema de equações de Euler-Lagrange, basta provar a existência de um ponto de mínimo absoluto para a ação. De fato, outras soluções podem corresponder a outros pontos críticos. Neste caso unidimensional, porém, é muito mais difícil minimizar a ação do que resolver a equação de Euler-Lagrange. A situação é dramaticamente diferente quando se passa para dimensões maiores (ou para dimensão infinita).

1.3 O Princípio de Dirichlet

O alemão Johann Dirichlet estudou o problema de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em\ \Omega \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1.

Usando o princípio do máximo, pode-se mostrar facilmente que (1.1) possui no máximo uma solução de classe $C^2(\overline{\Omega})$. Para provar a existência da solução para (1.1), porém, o trabalho é mais difícil.

Dirichlet mostrou que a solução de (1.1) corresponde ao ponto de mínimo absoluto do funcional

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^{\,2} - uf \right) dx \tag{1.2}$$

definido sobre a classe de funções

$$A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) \ \mid \ u = 0, \ \ sobre \ \ \partial\Omega\}$$

Eis o famoso princípio de Dirichlet:

Teorema 1 ***(PRINCÍPIO DE DIRICHLET)*** *Uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é a solução de (1.1) se e somente se u é um ponto de mínimo absoluto de (1.2).*

Prova: Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é a solução de (1.1), a condição de fronteira implica que $u \in A$. Dado $v \in A$, a equaçõ diferencial em (1.1) implica que

$$\int_\Omega -\Delta u(x)[u(x) - v(x)]dx = \int_\Omega f(x)[u(x) - v(x)]dx.$$

Integrando por partes o primeiro membro (e usando que $u = v \ \ em \ \ \partial\Omega$), tem-se que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla[u(x) - v(x)]dx = \int_\Omega f(x)[u(x) - v(x)]dx,$$

donde

$$\int_\Omega [\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - f(x)u(x)]dx = \int_\Omega [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x)]dx.$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, ficamos com

$$\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{\,2} - f(x)u(x)\right) dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^{\,2}dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v(x)|^{\,2} - f(x)v(x)\right) dx.$$

Portanto, pela definição (1.2), u é ponto de mínimo absoluto para o funcional I.

Por outro lado, seja $u \in A$ um ponto de mínimo absoluto de I. Para qualquer $v \in C_0^\infty(\Omega)$ fixado, considere a função real definida por

$$\imath(\lambda) = I(u + \lambda v)$$

Como $u + \lambda v \in A$, se $\imath$ for derivável em $\lambda = 0$, deve-se ter $\imath'(0) = 0$. Contudo,

$$\begin{aligned} \imath(\lambda) &= \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u(x) + \lambda \nabla v(x)|^{\,2} - f(x)[u(x) - \lambda v(x)]\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u(x)|^{\,2} + \lambda \nabla u(x) \cdots \nabla v(x) + \tfrac{\lambda^2}{2}|\nabla v(x)|^{\,2} - f(x)[u(x) - \lambda v(x)]\right) dx \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$0 = \imath'(0) = \int_\Omega [\nabla u(x) \cdots \nabla v(x) - f(x)v(x)]dx = \int_\Omega [-\Delta u(x) - f(x)]v(x)dx.$$

Uma vez que a identidade é válida para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, devemos ter $-\Delta u = f$ em Ω. Como $u \in A$, a condição de fronteira é automaticamente satisfeita e, portanto, u é solução de (1.1). ■

No caso da equação de Laplace, por exemplo, $f \equiv 0$ e I é limitado inferiormente por 0. Portanto $\inf_{u \in A} I(u) \geq 0$ e parece certa a existência de uma função minimante (uma função $u \in A$ onde I atinge seu mínimo). Entretanto, isto não é verdade. Mesmo para funções reais, a simples limitação inferior não garante um ponto de mínimo para a função. É só pegar por exemplo a função exponencial, que é limitada inferiormente por 0 porém não atinge o mínimo em seu domínio. É preciso portanto obter condições para garantirmos a existência de uma função minimante, e isto será feito mais a frente.

1.4 Do Clássico ao Moderno

No final do século XIX, com o estabelecimento de bases rigorosas para o Cálculo através da consolidação da Análise Matemática, os fundamentos e métodos do Cálculo das Variações foram postos em xeque. O alemão Karl Weierstrass, por exemplo, fez críticas duras ao Princípio de Dirichlet, principalmente no que se diz respeito à falta de rigor no tratamento da questão de existência.

Até então, as aplicações do Cálculo das Variações eram desenvolvidas sem o necessário rigor. Em muitos casos, a simples interpretação física da qual problemas matemáticos eram elaborados já garantia a existência de soluções para os mesmos.

Mas Weierstrass produziu um contra-exemplo de problema variacional que não admite solução minimal, apesar de o funcional em questão ser limitado inferiormente. Ele considerou o funcional $I : A \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_{-1}^{1} \left| x\frac{du}{dx} \right|^2 dx$$

onde

$$A = \{u \in C^1([-1,1], \mathbb{R}) \ \mid \ u(-1) = -1 \ \ e \ \ u(1) = 1\}.$$

Claramente, como $I(u) > 0 \ \forall u \in A$, temos uma limitação inferior para I. Contudo, I não assume seu ínfimo em A. Verifica-se este caso considerado a sequência

$$u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)} \in A.$$

Isso foi um choque para a teoria do Cálculo das Variações, que mergulhou então numa crise de fundamentos. Era preciso rever cuidadosamente os fundamentos da teoria e estabelecer bases rigorosas para o Cálculo das Variações.

1.5 O Método Variacional

Trabalhos de matemáticos como Weierstrass, Arzéla, Fréchet, Hilbert e Lebesgue estabeleceram bases rigorosas para o Princípio de Dirichlet e levaram o desenvolvimento da Análise Funcional e da moderna teoria das Equações Diferenciais Parciais.

A idéia fundamental de associar a existência de soluções à existência de pontos críticos de um funcional permanecia inalterada, mas percebeu-se rapidamente que a dimensão infinita dos espaços de funções tornava esta tarefa bem mais complicada. Em um primeiro momento, concentraram-se os esforços na busca de pontos de mínimo para funcionais limitados inferiormente.

No início do século XX, foi consolidado o Método Variacional Direto, que permite provar a existência de pontos de mínimo para funcionais que satisfazem certas condições específicas.

Os trabalhos pioneiros de Ljusternik-Schnirelman na primeira metade do século XX deixaram claro que o método cariacional funciona também se forem encontrados outros pontos críticos que não um mínimo ou máximo absoluto. A procura, todavia, de pontos de sela e extremos locais é uma tarefa árdua.

Na segunda metade do século XX, deram frutos as idéias de Ljusternik-Schnirelman, através dos trabalhos de Palais, Smale, Ambrosseti e Rabinowitz, que desenvolveram métodos do tipo *minimax* que garantem a existência de pontos de sela. Esse é o caso do famoso Teorema do Passo da Montanha, teoria esta que será estudada mais para frente neste projeto.

Capítulo 2

Espaços de Funções

Neste capítulo concentramos nossas atenções para a compreensão dos Espaços de Sobolev. Espaços estes que são ambientes mais adequados na formulação e resolução de variados problemas na Matemática Moderna. Para tanto, começamos com um estudo rápido (porém objetivo) nos aspectos mais importantes dos Espaços L^p.

É importante frisar que fica implícito, aqui neste capítulo, que um conhecimento prévio e introdutório da Análise Funcional (isto inclui Espaços Métricos, de Banach e de Hilbert, bem como os principais teoremas que os seguem) foi devidamente trabalhado e estudado no projeto de iniciação científica anterior (agosto de 2002 à julho de 2003). Daíseguimos portanto estudando os espaços de Funções propriamente ditos.

2.1 Espaços L^p

Denota-se Ω como sendo um aberto do $\mathbb{R}^N$ dotado da medida de Lebesgue dx. Designa-se por L^1 o espaço das funções integráveis sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$ cuja norma é dada por:

$$||f||_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Duas funções em L^1 são iguais quando coincidem q.t.p (quase todo ponto), ou seja, exceto num conjunto de medida nula.

Teorema 2 ***Teorema da convergência monótona de Beppo Levi***
Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1 tal que

$$\sup_n \int f_n < \infty.$$

Então $f_n(x)$ converge q.t.p. em Ω, isto é, $f_n(x) \to f(x)$ onde $f(x)$ é um limite finito. Além do mais $f \in L^1$ e $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.

Teorema 3 ***Convergência dominada de Lebesgue***
Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1. Suponhamos que:

1. *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;*
2. *existe uma função $g \in L^1$ tal que para cada n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_{L^1} \to 0$

Notação: Denota-se por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas de Ω e com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega \backslash K \textit{ donde } K \subset \Omega \textit{ é um compacto}\}$$

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos e seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável.

Teorema 4 **(Tonelli)**
Suponhamos que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty$$

para quase todo $x \in \Omega_1$ e que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty$$

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Teorema 5 ***(Teorema da densidade)***
O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$, quer dizer,

$$\forall f \in L^1 \quad e \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists f_1 \in C_c(\Omega) \ \ tal \ \ que \ \ ||f - f_1||_{L^1} < \varepsilon$$

O teorema acima surge como resultado bastante utilizado em diversas demonstrações de teoremas conseguintes.

Teorema 6 **(Fubini)**
Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entãopara quase todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \ \ e \ \ \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

Igualmente para quase todo $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \ \ e \ \ \int_{\Omega_1} |F(x,y)|dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

Além disso se verifica

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} |F(x,y)|dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x,y)|dx\, dy$$

Definição: *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; definimos por*

$$L^p = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \ é \ \ mensuravél \ \ e \ \ |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

E cuja norma é definida por:

$$||f||_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Definição: *Definimos por*

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ f \ é \ mensuravél \ e \ \exists \ C \ tal \ que \ |f(x)| < C \ \ q.t.p. \ \ em \ \Omega\}$$

E a norma é definida por

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C \ ; \ |f(x)| \leq C \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega\}$$

Observação: Se $f \in L^\infty$, então

$$|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty} \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega$$

De fato, existe uma sequência C_n tal que $C_n \longrightarrow ||f||_{L^\infty}$ e para cada n, $|f(x)| \leq C_n$ q.t.p. em Ω. Assim ,$|f(x)| \leq C_n \ \ \forall x \in \Omega \backslash E_n$ com E_n de medida nula. Se escreve $E = \bigcup_n E_n$ de forma que E é de medida nula $\forall n$ e $\forall x \in \Omega \backslash E$.

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$; se designa por p' o conjugado de p.

Com estas ferramentas pode-se provar que ao utilizarmos os espaços L^p em aplicações futuras, temos a garantia que os mesmos são espaços vetoriais normados e completos, portanto, espaços de Bannach.

Abaixo segue a demonstração da reflexividade dos espaços L^p

Teorema 7 *L^p é reflexivo para $1 < p < \infty$*

A demostração é feita provando-se três etapas distintas:

1. **(Primeira desigualdade de Clarkson)** *Seja $2 \leq p < \infty$; se verifica*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|^p_{L^p} + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|^p_{L^p} \leq \frac{1}{2}\left(||f||^p_{L^p} + ||g||^p_{L^p}\right) \ \ \forall f, g \in L^p \quad (2.1)$$

2. *L^p é uniformemente convexo, e portanto reflexivo para $2 \leq p \leq \infty$.*

3. *L^p é reflexivo para $1 < p \leq 2$.*

Com os resultados acima obtidos, podemos extender o teorema da densidade já apresentado acima para um teorema mais abrangente:

Teorema 8 *O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em L^p para $1 \leq p < \infty$.*

Precisamos ainda de uma outra definição e outro lema para poder ter as ferramentas necessárias para a prova deste teorema.

Definição: *Seja* $1 \leq p \leq \infty$; *Uma função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *pertence a* $L^p_{Loc}(\Omega)$ *quando* $f1_k \in L^p(\Omega)$ *para todo compacto* $K \subset \Omega$

Lema 1 *Seja* $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int fu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega) \tag{2.2}$$

Então $f = 0$ *q.t.p em* Ω

Demonstração do Teorema 8: É sabido que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Suponha então $1 < p < \infty$. Para demonstrar que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ é bastante verificar que se $h \in L^{p'}(\Omega)$ satisfaz

$$\int hu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega),$$

então $h = 0$. Mas $h \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e

$$\int |h1_k| \leq ||h||_{L^{p'}} |k|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e assim pode-se aplicar o Lema 1 para concluir que $h = 0$ q.t.p.

Outro resultado básico e que foi estudado com detalhes

Teorema 9 $L^p(\Omega)$ *é separável para* $1 \leq p < \infty$.

Por ter sido bastante discutido e trabalhado, segue aqui um resumo da demonstração:

Designa-se por $(R_i)_{i \in I}$ a família (enumerável) de retângulos R da forma

$$R = \prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[\;\; , \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q} \;\; e \;\; \mathbb{Q} \subset \Omega$$

Se designa por E o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelas funções 1_{R_i} (i.e. as combinações lineares finitas com coeficientes racionais das funçõse 1_{R_i}); de modo que E é enumerável. Demonstremos que E é denso em L^p .

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ *e* $\varepsilon > 0$ fixos. Seja $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que

$$||f - f_1||_{L^p} < \varepsilon.$$

Seja $\Omega^{'}$ um aberto limitado tal que

$$Supp\ f_1 \subset \Omega^{'} \subset \Omega.$$

Como $f_1 \in C_c(\Omega^{'})$, constrói-se uma função $f_2 \in E$ tal que

$$Supp\ f_2 \subset \Omega^{'}$$

e que

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} \quad q.t.p$$

em $\Omega^{'}$ pois começamos recobrindo $Supp\ f_1$ com um número finito de retângulos R_i sobre os quais a oscilação de f_1 é inferior a

$$\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}.$$

Daí resulta que $||f_2 - f_1||_{L^p} \leq \varepsilon$ e então

$$||f - f_2||_{L^p} < 2\varepsilon.$$

O próximo resultado afirma que existe uma isometria entre o dual do espaço L^1 com o espaço L^∞.

Teorema 10 *Seja* $\varphi \in (L^1)^{'}$. *Então existe* $u \in L^\infty$ *único tal que*

$$< \varphi, f >= \int u\ f \quad \forall f \in L^1.$$

Além do mais temos a igualdade:

$$||u||_{L^\infty} = ||\varphi||_{(L^1)'}$$

Observação: O espaço L^1 não é reflexivo. De fato, suponhamos que $0 \in \Omega$. Consideremos a sequência $f_n = \alpha_n 1_{B(0,\frac{1}{n})}$ com n suficientemente grande para que $B(0,\frac{1}{n}) \subset \Omega$ e $\alpha_n = \left|B(0,\frac{1}{n})\right|^{-1}$ de modo que $||f_n||_{L^1} = 1$. Se L^1 fosse reflexivo existira uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $f \in L^1$ tal que $f_{n_k} \to f$ na topologia fraca $\sigma(L^1, L^\infty)$. Assim pois,

$$\int f_{n_k}\varphi \to \int f\varphi \qquad \forall \varphi \in L^\infty. \tag{2.3}$$

Quando $\varphi \in C_c(\Omega\backslash\{0\})$ nota-se que $\displaystyle\int f_{n_k}\varphi = 0$ para k suficientemente grande. Resulta de (2.3) que

$$\int f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \to C_c(\Omega\backslash\{0\})$$

aplicando o Lema 1 no aberto $\Omega\backslash\{0\}$ a função f (restringida a $\Omega\backslash\{0\}$) obtemos que $f = 0$ q.t.p. em $\Omega\backslash\{0\}$. E portanto $f = 0$ q.t.p em Ω. porém se $f \equiv 1$ em (2.3), resulta que $\displaystyle\int f = 1$, o que é um absurdo.

Façamos um estudo agora das propriedades básicas do L^∞

- A bola unitária fechada B_{L^∞} é compacta na topologia fraca $\sigma(L^\infty, L^1)$
- Se (f_n) é uma sequência limitada em L^∞, pode-se retirar uma subsequência convergente em L^∞ na topologia fraca $\sigma(L^\infty, L^1)$

Porém, L^∞ não é reflexivo (caso contrário, L^1 seria).

O dual de L^∞ contêm L^1 (pois $(L^1)' = L^\infty$) e é estritamente maior que L^1; existem formas lineares contínuas φ sobre L^∞ que não são do tipo

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^\infty \quad com \quad u \in L^1$$

Observação: O espaço L^∞ não é separável.

O lema acima pode ser demonstrado utilizando o

Lema 2 *Seja E um espaço de Banach. Suponhamos que existe uma família $(O_i)_{i\in I}$ tal que*

1. *Para todo $i \in I$, O_i é um aberto não vazio de E.*
2. *$O_i \cap O_j = \varnothing$ se $i \neq j$.*
3. *I não é enumerável.*

Então E não é separável.

2.2 Derivadas Fracas

Esta sessão tem como objetivo enfraquecer a noção de Derivadas Parciais.

Motivação para a definição de derivadas fracas. Assuma que temos uma função $u \in C^1(\Omega)$. Então se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, vemos, devido à fórmula de integração por partes, que:

$$\int_\Omega u\phi_{x_i}dx = -\int_\Omega u_{x_i}\phi dx \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Não há termos de fronteira já que ϕ tem suporte compacto em Ω e portanto se anula em $\partial\Omega$. Mais geralmente agora, se k é um inteiro positivo, $u \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\phi dx \tag{2.5}$$

Esta equação é válida pois

$$D^\alpha\phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}}\phi$$

e nós podemos aplicar a formula (2.4) $|\alpha|$ vezes.

Nós agora examinamos a fórmula (2.5), válida para $u \in C^k$, e perguntamos se alguma variação dela ainda pode ser verdadeira mesmo se u não for k vezes continuamente diferenciável. Note que a parte esquerda de (2.5) faz sentido se u for apenas localmente somável. O problema é que se u não for C^k então a expressão "$D^\alpha u$"na parte direita da equação não tem sentido. Nós resolvemos este problema perguntando se existe uma função localmente somável v para a qual a equação (2.5) é válida ao trocar v por $D^\alpha u$:

Definição: *Suponha que $u, v \in L^1_{loc}\Omega$, e α é um multiíndice. Nós dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, denotada por $D^\alpha u = v$, quando*

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi dx \tag{2.6}$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Em outras palavras, se nos for dada uma u e se por acaso existir uma v satisfazendo (2.6) para toda ϕ, nós dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Do contrário, u não possui tal derivada fraca.

Assim, temos como resultado inicial o seguinte

Lema 3 *(Unicidade de derivadas fracas). Uma $\alpha-$ésima derivada parcial fraca de u, se existir, é unicamente definida a menos de um conjunto de medida nula.*

Prova: Assuma que $v, \widehat{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazem

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \widehat{v} \phi dx$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então

$$\int_\Omega (v - \widehat{v}) \phi dx = 0$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$; portanto $v - \widehat{v} = 0$ q.t.p. ■

2.3 Espaços de Sobolev

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não negativo. Nós iremos definir agora alguns espaços de funções, cujos membros possuem derivadas fracas de várias ordens em vários espaços L^p.

Definição: *O espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente somáveis tais que, para cada multiíndice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$.

Definição: *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, nós definimos sua norma como sendo*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} ess\ sup_\Omega |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases}$$

Definição: *Nós denotamos por*

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $Wk,p(\Omega)$.

Assim, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e somente se existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Nós interpretamos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como o espaço que contém funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que "$D^\alpha u = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega$" para todo $|\alpha| \leq k-1$.

Observação: É interessante notar que se $n = 1$ e $\Omega = I$ é um intervalo aberto da reta, então $u \in W^{1,p}(I)$ se e somente se u se iguala q.t.p. a uma funcão absolutamente contínua cuja derivada usual (que existe q.t.p.) pertence a $L^p(I)$. Tal caracterização tão simples existe apenas para $n = 1$. Geralmente uma função pode pertencer a um espaço de Sobolev e ainda assim ser descontínua e/ou não limitada.

Propriedades Elementares

Continuando nosso pequeno estudo nos espaços de Sobolev, nós passamos agora por algumas propriedades de derivadas parciais fracas que, para funções suaves são óbvias. no entanto ao nos depararmos com funções de Sobolev, devemos mostrar tais propriedades utilizando apenas a definição de derivadas fracas que foi estudada.

Teorema 11 *Assuma que $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq k$. Então*

- *$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ para quaisquer multiíndice α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.*
- *Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$*
- *Se A é um subconjunto aberto de Ω, então $u \in W^{k,p}(A)$.*
- *Se $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, então $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ e*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$$

Não apenas muitas regras usuais do Cálculo se aplicam a derivadas fracas, bem como os Espaços de Sobolev também possuem uma boa estrutura matemaática:

Teorema 12 *Para cada $k = 1, \dots$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

A prova deste acaba sendo não tão complicada. Primeiramente, é preciso provar que este espaço possui uma estrutura de espaço vetorial normado e, não por acaso, a norma previamente definida nesta seção satisfaz os axiomas de uma norma, com a desigualdade triangular podendo ser provada fazendo-se uso da já conhecida Desigualdade de Minkowski. Para provar a completude procedemos de forma usual, tomando uma seqência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$ e, utilizando-se do fato de que os espaços L^p são completos, provamos que esta sequência converge em $W^{k,p}(\Omega)$.

Capítulo 3

O Método Variacional Direto

3.1 A Forma Fraca do Princípio de Dirichlet

No capítulo anterior enfraquecemos a noção de derivada. Desta forma, podemos agora “adaptar”o problema (1.1) de Dirichlet na forma

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx &= \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \\ \\ u &= 0 \qquad\qquad \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

O espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ foi introduzido como o ambiente ideal para tratar o problema de Dirichlet (1.1) em sua forma (3.1), denominada por forma fraca do problema. A energia (funcional) (1.2) torna-se o funcional $I : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ e o Princípio de Dirichlet torna-se:

Teorema 13 ***(PRINCÍPIO DE DIRICHLET)*** *Uma função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (1.1) (i.e., solução de (3.1)) se, e somente se, u for um ponto de mínimo absoluto do funcional (1.2) definido em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

A demonstração é essencialmente a mesma do Teorema 1, com pequenas adaptações. A diferença é que agora a energia é um funcional definido sobre um espaço de Hilbert e a estrutura de $W_0^{1,2}(\Omega)$ pode ser usada. Por exemplo, pode-se falar da derivada da energia no sentido de Fréchet, dada por

$$I^{'}(u)\cdot v = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx, \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

A derivada de um funcional no sentido de Fréchet corresponde à tomada de derivadas direcionais, como foi feito na demonstração do Teorema 1. Note que as soluções da equação $I^{'}(u) = 0$ correspondem a soluções de (3.1), ou seja, pontos críticos de I correspondem a soluções fracas do problema (1.1).

A unicidade da solução fraca do problema em questão pode ser demonstrada da seguinte forma: se u e $\widehat{u}$ são soluções de (3.1), tem-se que, $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega \nabla \widehat{u}(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla (u - \widehat{u}) \cdot \nabla v(x) dx = 0.$$

Portanto $\nabla(u - \widehat{u}) = 0$ e, consequentemente $u - \widehat{u}$ é constante. Como u e $\widehat{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, resulta $u = \widehat{u}$

3.2 O Caso de Dimensão Finita

Antes de atacar o problema de encontrar um ponto de mínimo para um funcional definido no espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$, de dimensão infinita, pode ser interessante examinar um caso mais simples, como o problema análogo em $\mathbb{R}^N$. Para podermos ter uma melhor visão geométrica, tomemos o caso bidimensional.

Senfo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, é interessante obter condições sobre F que garantam a existência de um ponto de mínimo absoluto. Claramente, uma condição necessária à existência de tal ponto é a limitação inferior da função. Entretanto, esta condição não é suficiente, por exemplo, a fumção

$$F(x, y) = \epsilon^{-x^2 - y^2}$$

é diferenciável em todo o plano e limitada inferiormente pelo seu ínfimo 0, mas não assume este valor em ponto algum. O problema aqui é que a função decai para 0 quando $\|(x, y)\| \to \infty$, mas é sempre positiva.

Para garantir a existência de um ponto de mínimo absoluto, portanto, é preciso impedir de alguma forma que o ponto de mínimo "escape" como no exemplo anterior.

Se, ao contrário, houver uma sequência $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_n, y_n) \to \inf_(\mathbb{R}^2) F$ e $\|(x_n, y_n\| \leq M$ para algum $M \in \mathbb{R}$, então tem de existir pelo menos um ponto de mínimo absoluto de F. De fato, como esta sequênca é limitada, ela possui alguma subsequência convergente, e , portanto, pela continuidade da F, o ínfimo é atingido para algum ponto do domínio.

Assim, uma possibilidade para garantir a existência de um ponto de mínimo absoluto para F é impor, além da exigência de limitação inferior, alguma condição de crescimento que assegure a existência de uma sequência minimante limitada. Uma condição suficiente seria por exemplo,

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} F(x,y) = \infty.$$

Assim, o crescimento de F impede que o ponto de mínimo "escape para o infinito".

Conforme será visto adiante, condições de crescimento desempenham um papel muito importante na minimização de funcionais definidos em espaços de dimensão infinita.

3.3 O Problema da Compacidade

Infelizmente, no caso de dimensão infinita, o argumento da seção 3.2 não é válido. Utilizou-se fundamentalmente o fato de que toda sequência limitada do $\mathbb{R}^N$ possui alguma subsequência convergente, para podermos obter a existência de um ponto de mínimo absoluto. Entretanto, em espaços de dimensão infinita, existem sequências limitadas que não possuem nenhuma subsequência convergente.

Ocorre que no $\mathbb{R}^N$ qualquer bola é um conjunto compacto, o que não é verdade em espaços de dimensão infinita. Assim, ao tentar minimizar funcionais nestes espaços, mesmo considerando uma sequência minimante limitada, ainda é possível que o ponto de mínimo absoluto escape.

Portanto, a topologia de um espaço de dimensão infinita é completamente diferente. Isso afeta também a noção de continuidade de um funcional. Pode ser interessante, por exemplo, rever os conceitos de continuidade de um funcional, ou, ainda, alterar a topologia considerada - o uso das topologias fraca e fraca* é muito produtivo em alguns casos.

3.4 Semicontinuidade Inferior

Uma alternativa ao conceito de continuidade tradicional é o conceito de semicontinuidade inferior. Apesar de parecer feita sob medida para o método variacional direto, a noção de semicontinuidade inferior foi introduzida por Baire num contexto puramente topológico.

Sejam X um espaço topológico de Hauusdorff e $I : X \to \mathbb{R}$, I é semicontínuo inferiormente se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_\alpha = \{x \in X \mid I(x) > \alpha\}$ é aberto.

Uma condição que implica a semicontinuidade inferior é a condição de compacidade limitada: para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $K_\alpha = X \backslash A_\alpha$ é compacto (propriedade de Heine-Borel). Por outro lado se I é semicontínuo inferiormente e X é compacto, I satisfaz a condição de compacidade limitada. Em particular, se X é compacto, então ambas as condições são equivalentes.

Estas condições podem ainda serem expressas em termos de sequências: I é sequencialmente semicontínuo inferiormente se, para toda sequência $(x_n) \in X$ convergente para x_0, tem-se que $I(x_0) \leq \varliminf I(x_n)$; por sua vez, a condição sequencial de compacidade limitada é: cada K_α é sequencialmente compacto.

Verificamos que todo funcional semicontínuo inferiormente é sequencialmente semicontínuo inferiormente. A recíproca só é válida quando X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.

Com essas novas definições em mãos, pudemos então estudar o seguinte

Teorema 14 *Sejam X um espaço topológico e de Hausdorff e $I : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição sequencial de compacidade limitada. Então I é limitado inferiormente em X e assume seu ínfimo.*

A demonstração é simples e não foi interessante expô-la neste trabalho. Outro resultado extremamente útil em aplicações ocorre quando X é um subconjunto fracamente fechado de um espaço de Banach reflexivo e I é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente:

Teorema 15 *Sejam X um subconjunto fracamente fechado de um espaço de Banach reflexivo e $I : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

1. *$I(u) \to \infty$, quando $\|u\| \to \infty$ e $u \in X$;*
2. *para qualquer sequência $(x_n) \subset X$ fracamente convergente para x_0 tem-se que $I(x_0) \leq \varliminf I(x_n)$.*

Então I é limitado inferiormente e assume seu ínfimo em X

Vale destacar que a norma de um espaço de Banach é sempre coerciva e fracamente semicontínua inferiormente.

3.5 A Desigualdade de Poincaré

Retomando o objetivo de demonstrar a existência de solução fraca de (1.1) em $W_0^{1,2}(\Omega)$, busca-se alguma estimativa de crescimento da energia (1.2). Em outras palavras, deseja-se conhecer o comportamento de $I(u)$ quando $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to \infty$.

Mais precisamente, quer-se aplicar o Teorema 15 à energia, que só é possível se for coerciva.

De fato, a coercividade de I decorre do seguinte resultado:

Teorema 16 ***(DESIGUALDADE DE POINCARÉ)*** *Para toda função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ temos que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left[\frac{Vol(\Omega)}{\omega_N}\right]^{\frac{1}{N}} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

onde ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$

O importante aqui é que se obtém uma estimativa de $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ em termos somente da norma L^2 do gradiente de u. Afinal de contas o termo

$$\left[\frac{Vol(\Omega)}{\omega_N}\right]^{\frac{1}{N}}$$

não depende de u, mas somente de N e do volume de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Decorre imediatamente da desigualdade de Poincaré, que a norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ é equivalente à norma do gradiente definida em $W_0^{1,2}(\Omega)$ por

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{3.2}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Cauchy-Schwarz a (1.2), temos que

$$I(u) \geq A\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - B\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

para constantes A e B positivas. Portanto, $I(u) \to \infty$ quando $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to \infty$, ou seja, a energia é um funcional coercivo.

3.6 A Solução Fraca do Princípio de Dirichlet

Nesta seção nós provamos finalmente a existência de uma solução fraca para o problema de Dirichlet, ou seja, uma solução de (3.1) em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Trata-se de uma aplicação do Teorema 15 com $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ e I sendo a energia dada por (1.2).

Uma vez que $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, $W_0^{1,2}(\Omega)^* = W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$\left(W_0^{1,2}(\Omega)^*\right)^* = W_0^{1,2}(\Omega)^* = W_0^{1,2}(\Omega),$$

de modo que $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ de fato atende às hipóteses do Teorema 15.

A desigualdade de Poincaré (Teorema 16) garante a coercividade de I. Resta verificar, portanto, a semicontinuidade inferior fraca de I. Com efeito, para ver que I é fracamente sequancialmente semicontínuo inferiormente, note que, da definição da energia (1.2),

$$I(u) = \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + L(u)$$

onde $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ é dada por (3.2) e $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é o funcional linear dado por

$$L(u) = -\int_\Omega u(x)f(x)dx.$$

Mas a norma do gradiente é fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente e, da própria definição de convergência fraca, como L é um funcional linear, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ implica que $L(u_n) \rightharpoonup L(u)$, donde L é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Assim I também o é.

Consequentemente, a aplicação do Teorema 15 assegura a existência de um ponto de mínimo absoluto $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ora, pela forma fraca do princípio de Dirichlet (Teorema 13), u é a solução de (3.1).

Capítulo 4

O Teorema do Passo da Montanha

4.1 Métodos *Minimax*

Conforme foi visto anteriormente, a idéia central dos métodos variacionais é transformar o problema original em um problema de encontrar pontos críticos de um funcional definido em um espaço de funções adequado.

Na primeira parte deste trabalho, por exemplo, o Problema de Dirichlet foi formulado em sua forma fraca; o funcional energia foi então definido no espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$ e as técnicas da Análise Funcional foram utilizadas para demonstrar a existência de um ponto de mínimo absoluto da energia e, portanto, uma solução fraca do Problema de Dirichlet. Isso só foi possível porque a energia associada ao Problema de Firichlet é limitada inferiormente, coerciva e semicontínua inferiormente.

Entretanto, outros problemas envolvendo equações diferenciais são associados a funcionais com diferentes características. Em muitos casos, o funcional é indefinido (não limitado nem inferiormente e nem superiormente) e o método variacional direto não pode ser aplicado. Um exemplo cássico é o funcional $I : W_0^{1,2}([0,\pi]) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\left|\frac{du}{dx}\right|^2 - \frac{1}{4}u^4 \right) dx.$$

Fixado $u \in W_0^{1,2}([0,\pi])$ não-nulo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$I(\alpha u) = \alpha^2 \int_0^\pi \frac{1}{2}\left|\frac{du}{dx}\right|^2 dx - \alpha^4 \int_0^\pi \frac{1}{4}u^4 dx,$$

de modo que $I(\alpha u) \to -\infty$, quando $\alpha \to \infty$. Desta forma, I não é limitado inferiormente. Por outro lado, dado $n \in \mathbb{R}$,

$$I([sen(nx)]) = n^2 \int_0^\pi \frac{1}{2}|cos(nx)|^2 dx - \int_0^\pi \frac{1}{4}sen^4(nx)dx \geq \frac{\pi}{4}(n^2 - 1).$$

Fazendo $n \to \infty$, vê-se que $I[sen(nx)] \to \infty$ e I também não pode ser limitado superiormente. Ainda assim, pontos críticos do funcional correspondem a soluções fracas do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = u^3, \qquad em \qquad (0, \pi) \\ \\ u(0) = 0 \quad e \quad u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

e a solução trivial $u \equiv 0$ é um ponto crítico de I (que não é mínimo nem é máximo). Não é fácil saber se I possui ou não algum outro ponto crítico.

É necessário, portanto, estabelecer condições que garantam a existência de pontos críticos mesmo para funcionais indefinidos. Claramente, o método variacional direto, desenvolvido no Capítulo 3 não é aplicável, mas pode-se utilizar os espaços de Sobolev como pano de fundo para outros métodos variacionais.

Os métodos conhecidos como *minimax* foram desenvolvidos justamente para provar a existência de pontos críticos que não um mínimo ou um máximo absoluto. A essência de tais métodos é a obtenção de um valor crítico do tipo *minimax*; uma vez demonstrada a existência de tal valor, a existência de um ponto onde o valor crítico é efetivamente atingido (ou seja, de um ponto crítico) decorre de condições de compacidade do funcional em questão.

Neste capítulo, será demonstrado o Teorema do Passo do Montanha, que foi um marco na história dos métodos variacionais. Trata-se da primeira vez que se provou a existência de um ponto crítico que não um mínimo absoluto. Em seu trabalho pioneiro na década de 1970, Ambrosseti e Rabinowitz utilizaram os resultados obtidos por Palais e Smale alguns anos antes para provar o teorema do Passo da Montanha. Em especial, foram utilizados a condição de Palais-Smale (PS) e o Lema da Deformação.

4.2 A Geometria do Passo da Montanha

A idéia geométrica do Teorema do Passo da Montanha pode ser resumida da seguinte forma: suponha que se deseja transpor uma cadeia montanhosa com o mínimo de esforço possível. Ora, qualquer caminho saindo do sopé de um lado da montanha e indo até o sopé do outro lado passará por um ponto cuja altitude seja máxima (para aquele caminho). A idéia é procurar, dentre todos os caminhos possíveis, um cuja altitude máxima seja mínima (daí a expressão minimax). Intuitivamente, isso acontece justamente na região da montanha conhecida como passo.

Em termos matemáticos, fixados dois pontos P e $Q \in \mathbb{R}^2$, considere o conjunto

$$A = \{\alpha \in C^2([0,1], \mathbb{R}^2) \ \mid \ \alpha(0) = P \ \ e \ \ \alpha(1) = Q\}$$

dos caminhos suaves ligando P e Q. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (aqui $f(x,y)$ seria a altitude correspondente ao ponto (x,y)), busca-se um caminho $\alpha \in A$ sobre o qual o valor máximo de f seja o menor possível.

Uma primeira iniciativa seria determinar uma "altitude crítica" h_c, i.e., a menor altitude que um caminho precisa atingir para poder ligar P a Q. Esse nível crítico seria dado por

$$h_c = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \max_{t \in [0,1]} |f(\alpha(t))| \right\}$$

Claramente, cada curva $\alpha \in A$ atinge um máximo (pois α é de classe C^2 e o intervalo $[0,1]$ é compacto). Entretanto, é possível que h_c não seja atingido sobre a classe de curvas de A, motivo pelo qual não se pode substituir o ínfimo por mínimo na equação acima.

Para ver como o ínfimo pode deixar de ser atingido, tome $P = (0,1)$, $Q = (0,-1)$ e $f(x,y) = e^{-5y^2}(e^{-x}+1)$. Para começar, note que $f(P) = f(Q) = 2e^{-5}$. além disso, qualquer caminho ligando P a Q precisa cortar em algum ponto a reta $y = 0$, sobre a qual $f > 1$. Assim, $h_c \geq 1$. De fato, mostremos que $h_c = 1$.

Considerando a família de curvas

$$\alpha_n(t) = \big(4n(t-t^2), 1-2t\big)$$

tem-se

$$f \circ \alpha_n(t) = e^{(4n-20)(t^2-t)-5} + e^{-20(t^2-t)-5}$$

e

$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha_n(t) = \big[(4n-20)e^{4n-20(t^2-t)-5} - 20e^{-20(t^2-t)-5}\big](2t-1),$$

de modo que

$$\max_{t \in [0,1]} [f \circ \alpha_n(t)] = f \circ \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-n} + 1.$$

Assim, realmente $h_c = 1$, de modo que nenhuma curva ligando P a Q tem máximo h_c.

No caso em que o mínimo h_c é atingido, o passo da montanha corresponde exatamente ao ponto de máximo de uma curva $\alpha \in A$ que realiza esta altitude máxima.

Intuitivamente, este seria um ponto de sela, pois localmente este ponto é um ponto de máximo na direção de α e é um ponto de mínimo na direção perpendicular. Assim, o passo da montanhda tem que ser um ponto crítico de f (não necessariamente um ponto de sela, já que esse ponto também pode ser um ponto de máximo).

Em vista do que já foi feito neste capítulo, para garantir a existência de um ponto crítico de f, é necessário obter condições que garantam que o nível crítico h_c seja efetivamente atingido. Como o objetivo principal é obter a existência de um ponto crítico, é importante que essas condições não envolvam a existência de pontos de críticos tais como pontos de máximo ou de mínimo.

Em primeiro lugar, precisa-se evitar que a "montanha" possa ser contornada. Uma condição para garantir isso, seria a existência de um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ dividindo o plano em duas componentes conexas disjuntas, uma contendo P e outra contendo Q, e tal que

$$\inf_{\Gamma} f > \max[f(P), f(Q)].$$

Entretanto, apenas esta condição não basta: é preciso evitar que o ponto crítico "escape" para o infinito. Uma tentativa natural seria pedir que Γ seja compacto, mas isso não é suficiente, visto que não há porquê o nível crítico ser atingido sobre Γ.

Diversas condições sobre f podem resolver este problema. Por exemplo, condições de crescimento que garantam que f esteja bem acima do nível crítico h_c fora de uma bola. Analogamente, condições de decaimento que assegurem que f esteja bem abaixo do nível crítico h_c fora de uma bola também garantem a existência de um ponto crítico. De fato, a sequência dos pontos máximos p_n de qualquer sequência minimante de curvas $\alpha)n$ é tal que $f(p_n) \to h_c$; condições como as citadas acima garantem que $(pn)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, devendo portanto possuir uma subsequência convergente para um ponto crítico.

Por exemplo, considere a função

$$f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}.$$

Sejam $P = (0,0)$ e $Q = (2,2)$ e

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Tem-se que $f(P) = 0$ e $f(Q) = 16e^{-7} - 1 < 0$, enquanto

$$\inf_{\Gamma} f = \frac{7}{8}.$$

Assim, $h_c \geq \frac{7}{8}$; afinal de contas, qualquer caminho contínuo ligando P a Q tem obrigatoriamente que interceptar Γ em pelo menos um ponto. Agora, seja $(\alpha_n) \subset A$ uma sequência de curvas tal que

$$\max_{t\in[0,1][f\circ\alpha_n(t)]\to h_c,\quad quando \quad n\to\infty}$$

(tal sequência existe pela definição de ínfimo). Seja t_n o ponto de máximo de $f \circ \alpha_n$, $p_n = a_n(t_n)$ é o ponto de máximo de f sobre α_n e $f(p_n) \to h_c$ quando $n \to \infty$. Mas

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = -\infty,$$

de modo que existe $R > 0$ tal que $f(x,y) < 0$ quando $|(x,y)| > R$. A sequência (p_n) está contida portanto em B_R. Como B_R é compacto, a sequência deve portanto possuir alguma subsequência convergente. Assim, renomeando a sequência se necessário, $p_n \to p$ e, pela continuidade da f, devemos ter $f(p) = h_c$. Verifica-se que p é um ponto crítico de f de modo que h_c é um valor crítico de f.

4.3 A Condição de Palais-Smale

Como foi visto no Capítulo 3, as bolas não são compactas em espaços de dimensão infinita. Assim, para utilizar as idéias da secão anterior, é preciso obter alguma condição que resolva o problema da falta de compacidade.

Na década de 1960, Palais e Smale trabalharam nesse problema e chegaram a uma condição que, de certa forma, garante que um funcional tenha alguma "compacidade". Os resultados de Palais e Smale são de fato bem gerais, sendo válidos para espaços de Banach reais. Por motivos heurísticos, eles são apresentados somente para espaços de Hilbert.

Sendo H um espaço de Hilbert, $C^1(H,\mathbb{R})$ é definido como o conjunto dos funcionais $I : H \to \mathbb{R}$ que são diferenciáveis no sentido de Frechét e cujas derivadas de Frechét são contínuas em H. Diz-se que um funcional $I \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se qualquer sequência $(u_n) \subset H$ tal que $\big(I(u_n)\big)$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, possui uma subsequência convergente.

Note que, se um funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), o conjunto K_c dos pontos críticos de I correspondentes ao valor crítico c é compacto para todo $c \in \mathbb{R}$

A condição (PS) é muito conveniente para a aplicação dos métodos variacionais, como será visto mais adiante. Diversas variantes foram desenvolvidas ao longo dos anos.

4.4 O Lema da Deformação

Os primeiros resultados de deformação surgiram a partir de 1965, com um artigo de Browder. A idéia da deformação vem do fato de que um conjunto de nível correspondente a um valor regular pode ser deformado continuamente em conjuntos de nível próximos.

Para funções suaves em $\mathbb{R}^2$, por exemplo, a deformação pode ser feita seguindo o fluxo do campo gradiente (para tempos positivos ou negativos).

Entretanto, uma curva de nível correspondente a um nível crítico nem sempre pode ser deformada continuamente em curvas vizinhas. Isso acontece porque a geometria das curvas de nível pode alterar-se radicalmente em um nível crítico. Por exemplo, círculos podem degenerar-se em um ponto de mínimo ou de máximo.

Em espaços de dimensão infinita, a situação é ainda mais delicada, pois os conjuntos de nível podem possuir uma topologia bastante bizarra. Além disso, pode não haver um campo gradiente e trabalhar com campos vetoriais pode gerar transtornos.

Para lidar com tais problemas, ao invés de trabalhar com conjuntos de nível, é mais apropriado trabalhar com os conjuntos

$$K_c = \{u \in H \quad | \quad I(u) = c \;\; e \;\; I'(u) = 0\}$$

dos pontos críticos correspondentes ao nível c e

$$A_c = \{u \in H \;\; | \;\; I(u) \leq c\}$$

dos pontos de H onde I não supera o nível c. Note que em um valor regular $K_c = \emptyset$, enquanto em um valor crítico $K_c \neq \emptyset$.

O Lema da Deformação garante que, para funcionais satisfazendo (PS), assim como ocorre em $\mathbb{R}^N$, se c é um valor regular de um funcional, para ε suficientemente pequeno, o conjunto $A_{c+\varepsilon}$ pode ser deformado continuamente, através do nível c, para dentro do conjunto $A_{c-\varepsilon}$. Assim, conjuntos de nível suficientemente próximos do conjunto de nível c podem ser deformados continuamente através do conjunto de nível c até ficarem completamente abaixo do nível c.

Quando c é um valor crítico, da mesma forma que em $\Re^N$, a mudança na geometria dos conjuntos de nível pode impedir que a deformação possa ser feita continuamente.

Teorema 17 - *LEMA DA DEFORMAÇÃO:* *Se $I \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisfaz (PS), I' é localmente Lipchitziana e c não é valor crítico de I, então dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $0 < \delta < \varepsilon$ e uma deformação contínua $\eta : [0,1] \times H \to H$ tais que:*

1. $\eta(0,u) = u \ \ \forall\ u \in H$;

2. $\eta(1,u) = u \ \ \forall\ u \notin I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$;

3. $I[\eta(t,u)] \leq I(u) \ \ \forall\ u \in H \ \ e \ \ \forall t \in [0,1]$;

4. $\eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$

4.5 A Prova do Teorema do Passo da Montanha

Utilizando a idéia geométrica de *minimax* discutida na seção 4.2 e o Lema da Deformação pode-se provar o famoso Teorema do Passo da Montanha, de Ambrosseti e Rabinowitz.

Teorema 18 *(PASSO DA MONTANHA)* *Se $I \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisfaz (PS), I' é localmente Lipschitziana e, além disso, I é tal que:*

1. $I(0) = 0$;

2. *existem m e r positivos tais que $I(u) \geq m$, quando $\|u\| = r$;*

3. *existe $v \in H$ tal que $I(v) \leq 0$ e $\|v\| > r$,*

então I possui um valor crítico

$$c = \inf_{\alpha \in A} \Big\{ \max_{t\in[0,1]} I[\alpha(t)] \Big\}$$

onde

$$A = \{\alpha \in C([0,1],H) \ \ | \ \ \alpha(0) = 0 \ \ e \ \ \alpha(1) = v\}$$

Prova: Suponha que c não é valor crítico de I. Escolha ε suficientemente pequeno para usar o Lema da Deformação e tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{m}{2}.$$

Pelo Lema da Deformação, existem $0 < \delta < \varepsilon$ e um homeomorfismo $\eta(1,\cdot) : H \to H$ tal que $\eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$ e $\eta(1,u) = u \ \ \forall\, u \notin I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$.

Pela definição de c, pode-se tomar $\alpha \in A$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I[\alpha(t)] \leq c + \delta.$$

Seja $\tilde{\alpha} = \eta(1,\cdot) \circ \alpha$, como $\alpha(t) \in A_{c+\delta}$ para todo $t \in [0,1]$, $\tilde{\alpha}(t) \in A_{c-\delta}$ para todo $t \in [0,1]$. Ora, claramente, $c \geq m$, de modo que $0 \notin I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ e

$$\tilde{\alpha}(0) = 0.$$

De modo análogo, $v \notin I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ e, portanto

$$\tilde{\alpha}(1) = v.$$

Assim, $\tilde{\alpha} \in A$, o que é uma contradição visto que

$$\max_{t\in[0,1]} I[\tilde{\alpha}(t)] \leq c - \delta.$$

Logo, c deve ser um valor crítico de I. ∎

Capítulo 5

Princípios Variacionais de Ekeland

INTRODUÇÃO
Dizemos que um funcional é limitado por baixo por seu ínfimo se ele possui algum tipo de continuidade numa topologia que é compacta (localmente) para o domínio do funcional dado. Em outras situações de interesse para as aplicações isto não é necessário. Por exemplo, os funcionais definidos em espaços de Hilbert (com dimensão infinita) são contínuos na topologia da norma, mas não são contínuos na topologia fraca.

Teorema 19 *(Princípio de Ekeland) Seja (X, d) um espaço métrico completo e considere uma função $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i., limitada por baixo e não identicamente igual a $+\infty$. Seja $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ dados e $u \in X$ tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$$

Então, existe $v_\varepsilon \in X$ tal que
(i) $\varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(u)$
(ii) $d(u, v_\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$
(iii) Para cada $w \neq v_\varepsilon$ em X,

$$\varphi(w) > \varphi(v_\varepsilon) - \varepsilon\lambda d(v_\varepsilon, w)$$

Prova: Basta verificarmos que $\exists\ v_\varepsilon \in X$ tal que
(i)' $\varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(u)$
(ii)' $d_\lambda(u, v_\varepsilon) \leq 1$
(iii)' Para cada $w \neq v_\varepsilon$ em X,

$$\varphi(w) > \varphi(v_\varepsilon) - \varepsilon d_\lambda(v_\varepsilon, w)$$

Donde o teorema segue-se fazendo

$$d_\lambda(u, v_\varepsilon) = \lambda d(u, v_\varepsilon)$$

Introduza a seguinte ordem parcial em X:

$$w \prec v \Leftrightarrow \varphi(w) \leq \varphi(v) - \varepsilon d_\lambda(v, w) \qquad (*)$$

Afirmação 1 *(*) é de fato uma relação de ordem parcial em X*

Sejam u, v, w em X , então podemos ver que (*):
(i)(é reflexiva), ou seja, $u \prec u$
De fato,

$$\varphi(u) - \varepsilon d_\lambda(u, u) = \varphi(u) \geq \varphi(u)$$

(ii)(é anti-simétrica), ou seja , se $u \prec v$ e $v \prec u$ então $u = v$
De fato,

$$\text{Se } u \prec v \Rightarrow \varphi(u) \leq \varphi(v) - \varepsilon d_\lambda(v, u) \quad (I)$$
$$\text{Se } v \prec u \Rightarrow \varphi(v) \leq \varphi(u) - \varepsilon d_\lambda(u, v) \quad (II)$$

De (I) e (II) temos

$$\varphi(u) \leq \varphi(v) - \varepsilon d_\lambda(v, u) \leq \varphi(u) - \varepsilon d_\lambda(u, v) - \varepsilon d_\lambda(v, u) = \varphi(u) - 2\varepsilon d_\lambda(v, u)$$

Logo,

$$2\varepsilon d_\lambda(v, u) \leq 0 \Rightarrow d_\lambda(v, u) \leq 0 \Rightarrow u = v$$

(iii)(é transitiva),ou seja, se $u \prec v$ e $v \prec w$ então $u \prec w$
De fato,

$$\text{Se } u \prec v \Rightarrow \varphi(u) \leq \varphi(v) - \varepsilon d_\lambda(v, u) \quad (III)$$
$$\text{Se } v \prec w \Rightarrow \varphi(v) \leq \varphi(w) - \varepsilon d_\lambda(w, v) \quad (IV)$$

De (III) e (IV), temos

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\leq \varphi(v) - \varepsilon d_\lambda(v, u) \\ &\leq \varphi(w) - \varepsilon d_\lambda(w, v) - \varepsilon d_\lambda(v, u) \\ &= \varphi(w) - \varepsilon(d_\lambda(w, v) + d_\lambda(v, u)) \\ &\leq \varphi(w) - \varepsilon d_\lambda(w, u) \end{aligned}$$

Logo, $u \prec w$
Agora vamos construir uma sequência (S_n) de subconjuntos de X como segue-se:
Considere $u_1 = u$. E defina,

$$S_1 = \{w \in X; w \prec u_1\}; \ u_2 \in S_1 \quad s.t \ \ \varphi(u_2) \leq \inf_{S_1} \varphi + \frac{\varepsilon}{2^2}$$

indutivamente, temos

$$S_n = \{w \in X; w \prec u_n\};\ u_{n+1} \in S_n \quad s.t \ \ \varphi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \varphi + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Afirmação 2 $S_{n+1} \subset S_n$

De fato, Como $u_{n+1} \in S_n \Rightarrow u_{n+1} \prec u_n \Leftrightarrow \varphi(u_{n+1}) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(u_n, u_{n+1})$
Tome $x \in S_{n+1}$ e mostremos que $x \in S_n$. Temos que

$$\begin{array}{rcl} x \in S_{n+1} & \Rightarrow & x \prec u_{n+1} \Leftrightarrow \\ \varphi(x) & \leq & \varphi(u_{n+1}) - \varepsilon d_\lambda(u_{n+1}, x) \\ & \leq & \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(u_n, u_{n+1}) - \varepsilon d_\lambda(u_{n+1}, x) \\ & = & \varphi(u_n) - \varepsilon(d_\lambda(u_n, u_{n+1}) + d_\lambda(u_{n+1}, x)) \\ & \leq & \varphi(u_n) - \varepsilon d(u_n, x) \end{array}$$

Portanto,

$$\varphi(x) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d(u_n, x) \Rightarrow x \prec u_n \Rightarrow x \in S_n$$

Afirmação 3 S_n *é fechado.*

De fato, tome $x_j \in S_n$ tal que $x_j \to x \in X$ quando $j \to \infty$.
Sendo $x_j \in S_n$ então $x_j \prec u_n \qquad \Leftrightarrow$

$$\varphi(x_j) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(u_n, x_j)$$

Passando o lim ínfimo quando $j \to \infty$ temos

$$\lim_{j\to\infty} \inf \varphi(x_j) \leq \lim_{j\to\infty} \inf \varphi(u_n) - \varepsilon \lim_{j\to\infty} \inf d_\lambda(u_n, x_j)$$

Pela semicontinuidade da φ e pela continuidade de d , temos

$$\varphi(\lim_{j\to\infty} \inf x_j) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(\lim_{j\to\infty} \inf u_n, \lim_{j\to\infty} \inf x_j)$$

Portanto,

$$\varphi(x) \leq \varphi(u_n) - d_\lambda(u_n, x) \Rightarrow x \prec u_n$$

Logo, $x \in S_n$
(**outra demonstração da afirmação 3**)
De fato, sendo φ s.c.i., temos que para a $\in \mathbb{R}$, $\{x \in X; \varphi(x) > a\}$ é aberto $\Rightarrow \{x \in X; \varphi(x) \leq$ a$\}$ é fechado.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} S_n &= \{w \in X; w \prec u_n\} \\ &= \{w \in X; \varphi(w) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(u_n, w)\} \\ &= \{w \in X; \varphi(w) \leq a\} \end{aligned}$$

com $a = \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(u_n, w)$.
Logo, S_n é fechado.

Afirmação 4 *diam* $S_n \to 0$

De fato, tome $x \in S_n$ arbitrário, então,
Por um lado,

$$x \prec u_n \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(u_n, x) \Rightarrow \varepsilon d_\lambda(u_n, x) \leq \varphi(u_n) - \varphi(x)$$

Por outro lado, temos que $u_n \in S_{n-1}$ e

$$\varphi(u_n) \leq \inf_{S_{n-1}} \varphi + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \forall u \in S_{n-1}$$

Como $x \in S_n$,temos que $x \in S_{n-1}$.
Portanto,

$$\varphi(u_n) \leq \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Logo,

$$\varepsilon d_\lambda(u_n, x) \leq \varphi(u_n) - \varphi(x) \leq \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n} - \varphi(x) = \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Daí,

$$d_\lambda(u_n, x) \leq 2^{-n}$$

Como S_n é fechado,temos que:

$$diam(S_n) = máx\{d(x,y);\ x,y \in S_n\}$$

Como u_n está fixo e x é arbitrário, podemos tomar x de modo que

$$diam(S_n) \leq 2d_\lambda(u_n, x) \leq 2^{-n+1}$$

Logo, $diam(S_n) \to 0$ se $n \to \infty$

Sendo X completo e $diam(S_n) \to 0$, temos que existe $v_\varepsilon \in X$ tal que

$$\bigcap_n S_n = \{v_\varepsilon\}$$

Afirmação 5 *v_ε satisfaz (i)',(ii)' e (iii)'*

De fato, é claro que $v_\varepsilon \in S_1 \Rightarrow v_\varepsilon \prec u_1 = u \Rightarrow \varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(u) - \varepsilon d_\lambda(u, v_\varepsilon) \leq \varphi(u)$ ou seja,

$$\varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(u) \ \text{ para algum } \ v_\varepsilon \in X$$

Assim, mostremos (i)'
Agora, sendo,

$$\varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(u) - \varepsilon d_\lambda(u, v_\varepsilon)$$

Temos

$$\varepsilon d_\lambda(u, v_\varepsilon) \leq \varphi(u) - \varphi(v_\varepsilon) \Rightarrow d_\lambda(u, v_\varepsilon) \leq \varepsilon^{-1}(\varphi(u) - \varphi(v_\varepsilon))$$

Por outro lado,

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon \quad \text{ e } \ \varphi(v_\varepsilon) \geq \inf_X \varphi \Rightarrow -\varphi(v_\varepsilon) \leq -\inf_X \varphi$$

Daí,

$$d_\lambda(u, v_\varepsilon) \leq \varepsilon^{-1}(\inf_X \varphi + \varepsilon - \inf_X \varphi) = 1$$

Logo,(ii)' é satisfeita

Agora para mostrar (iii)' basta ver que se $w \neq v_\varepsilon$ então, $w \not\prec v_\varepsilon$
Suponha por contradição que $w \prec v_\varepsilon$ para $w \in X$
Como $v_\varepsilon \in S_n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_\varepsilon \prec u_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
Logo, $w \prec u_n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \in S_n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow w \in \bigcap_n S_n = \{v_\varepsilon\} \Rightarrow w = v_\varepsilon$.
o que é uma contradição.

Portanto, Se $w \neq v_\varepsilon \Rightarrow w \not\prec v_\varepsilon$.
Ou seja,

$$Se\ w \neq v_\varepsilon \Rightarrow \varphi(w) > \varphi(v_\varepsilon) - \varepsilon d_\lambda(v_\varepsilon, w)$$

Assim, mostremos (iii)'. ∎

Definição: *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto de X Banach. O funcional φ tem derivada de Gateaux $f \in X'$ em $u \in U$ se para todo $v \in X$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u) - < f, tv >}{t} = 0$$

A derivada de Gateaux em u é denotada por $\varphi'(u)$.

Definição: *O funcional φ tem derivada de Fréchet $f \in X'$ em $u \in X$ se*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\varphi(u + v) - \varphi(u) - < f, v >}{\| v \|} = 0$$

Definição: *O funcional $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada no sentido de Fréchet existe e é contínua em $u \in U$.*

Observação: Se X é um espaço de Hilbert e φ tem derivada de Gateaux em $u \in U$, o gradiente de φ em u é definido por

$$(\nabla \varphi(u), v) := < \varphi'(u), v >$$

Observação: A derivada de Gateaux é dada por

$$< \varphi'(u), v > := \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t}$$

Observação: Toda derivada de Fréchet é uma derivada de Gateaux.

Corolário 1 *Seja X Banach e $\varphi : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ limitada por baixo e diferenciável em X. Então para cada $\varepsilon > 0$ e $u \in X$ tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon^2$$

existe $v_\varepsilon \in X$ tal que
(i) $\varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(u)$
(ii) $\| u - v_\varepsilon \| \leq \varepsilon$
(iii) $\| \varphi'(v_\varepsilon) \| \leq \varepsilon$

Prova: Sendo φ diferenciável em $X \Rightarrow \varphi$ é contínua $\Rightarrow \varphi$ é *s.c.i.* No teorema anterior, fazendo $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$, temos que existe $v_\varepsilon \in X$ tal que

$$\varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(u) \quad \text{e} \quad d(u, v_\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \| u - v_\varepsilon \| \leq \varepsilon$$

Assim, (i) e (ii) estão satisfeitas.
E, fazendo $\lambda = \varepsilon^{-2}$ no teorema anterior, temos para cada $w \neq v_\varepsilon$ em X

$$\varphi(w) > \varphi(v_\varepsilon) - \varepsilon \| v_\varepsilon - w \| \qquad (*)$$

Aplicando em (*) $w = v_\varepsilon + th$ com $t > 0$ e $h \in X$, $\| h \| = 1$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(v_\varepsilon + th) &> \varphi(v_\varepsilon) - \| th \| = \varphi(v_\varepsilon) - \varepsilon t \\ &\Rightarrow \varphi(v_\varepsilon + th) - \varphi(v_\varepsilon) > -\varepsilon t \\ &\Rightarrow \frac{\varphi(v_\varepsilon + th) - \varphi(v_\varepsilon)}{t} > -\varepsilon \end{aligned}$$

Tomando limite quando $t \to 0$ temos

$$-\varepsilon \leq \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(v_\varepsilon + th) - \varphi(v_\varepsilon)}{t} \overset{(1)}{=} < \varphi'(v_\varepsilon), h >$$

Ou seja,

$$-\varepsilon \leq < \varphi'(v_\varepsilon), h > \quad \forall \ h \in X \ \ com \ \| h \| = 1 \qquad (**)$$

(1) é verdade pois sendo φ Fréchet diferenciável, então φ é Gateaux diferenciável, e, portanto, (1) acontece. Agora observe que, em particular, (**) vale para $-h$. Portanto,

$$-\varepsilon \leq < \varphi'(v_\varepsilon), -h > = - < \varphi'(v_\varepsilon), h > \quad \Rightarrow \quad < \varphi'(v_\varepsilon), h > \leq \varepsilon$$

Logo,

$$|< \varphi'(v_\varepsilon), h >| \leq \varepsilon \qquad \forall \ h \in X \text{ com } \| h \| = 1$$

Agora,

$$\| \varphi'(v_\varepsilon) \| = \sup \frac{|<\varphi'(v_\varepsilon), h>|}{\| h \|} \leq \varepsilon$$

■

Corolário 2 *: Seja X Banach e $\varphi : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ limitada por baixo e diferenciável em X. Então, para cada sequência minimizante (u_k) para φ, existe uma sequência minimizante (v_k) para φ tal que*
(i)$\varepsilon(v_k) \leq \varphi(u_k)$
(ii)$lim_k \| u_k - v_k \| = 0$
(iii)$lim_k \varphi'(v_k) = 0$

Prova: Seja (u_k) uma sequência minimizante de φ, tome

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varphi(u_k) - \inf_X \varphi, & \text{se} \quad \varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0 \quad (1) \\ \dfrac{1}{k}, & \text{se} \quad \varphi(u_k) - \inf_X \varphi = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Tratemos os casos (1) e (2)
Se u_k é tal que $\varphi(u_k) - \inf_X \varphi > 0$, então tome $\varepsilon_k = \varphi(u_k) - \inf_X \varphi$ no corolário anterior e temos que existe $(v_k) \in X$ tal que
(i) $\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$
(ii) $\| u_k - v_k \| \leq \varepsilon_k = \varphi(u_k) - \inf_X \varphi \to 0$ pois, (u_k) é uma sequêcia minimizante.
(iii) $\| \varphi'(v_k) \| \leq \varepsilon_k \quad \Rightarrow \lim_k \varphi'(v_k) = 0$

Agora se u_k é tal que $\varphi(u_k) - \inf \varphi = 0$, então tome $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ no corolário anterior e então , existe (v_k) tal que
(i) $\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$
(ii) $\| u_k - v_k \| \leq \varepsilon_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \| u_k - v_k \| \to 0 \quad$ se $\quad k \to \infty$
(iii) $\| \varphi'(v_k) \| \leq \varepsilon_k = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \varphi'(v_k) \to 0$ quando $k \to \infty$ ■

Definição: *:(Brézis - Niremberg, 1980) Seja X Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. A função φ satisfaz $(PS)_c$ (condição de Palais -Smale em nível c) se toda sequência $(u_n)_n$ satisfazendo*

$$\varphi(u_n) \to c \quad e \quad \| \varphi'(u_n) \| \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to 0$$

tem uma subsequência convergente. Considere K_c o conjunto de todos os pontos críticos em nível c, i.e.,

$$K_c = \{x \in X; \varphi(x) = c \ \ , \varphi'(x) = 0\}$$

Corolário 3 *: Seja φ uma função de classe C^1 em um espaço de Banach X.*
(i) Se φ é limitada por baixo e verifica $(PS)_c$ com $c = \inf_X \varphi$, então toda sequência

minimizante para φ é relativamente compacta.
Em particular, φ atinge seu mínimo num ponto em K_c.
(ii) Se $d = \lim_{\|u\| \to \infty} inf \varphi(u)$ é finito, então φ não verifica $(PS)_d$

Prova: (i) Seja (u_n) uma sequência minimizante para φ. Pelo corolário anterior, $\exists$ uma sequência minimizante (v_n) para φ tal que

$$\phi(v_n) \leq \phi(u_n) \qquad \| v_n - u_n \| \to 0 \quad \text{e} \qquad \phi'(v_n) \to 0$$

Daí, temos:
$\phi(v_n) \leq \phi(u_n) \leq \inf_X \varphi + \frac{1}{n} = c + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \phi(v_n) \to c \quad$ quando $\; n \to \infty$
Logo,

$$\phi(v_n) \to c \quad \text{e} \quad \phi'(v_n) \to 0$$

Portanto, por $(PS)_c$, (v_n) possui uma subsequência convergente. Como $\| v_n - u_n \| \to 0$, temos que u_n possui uma subsequência convergente. Portanto,u_n é relativamente compacta.
Em particular, existe (v_{n_j}) subseqũencia de (v_n) tal que $v_{n_j} \to v_n$ em X.
Como φ é contínua, temos que

$$\varphi(v_{n_j}) \to \varphi(v_0)$$

Mas,

$$\varphi(v_{n_j}) \to 0$$

Logo, pela unicidade do limite, temos que

$$\varphi(v_0) = c$$

De modo análogo, como $v_{n_j} \to v_0$ em X e φ' é contínua, temos,

$$\varphi'(v_{n_j}) \to \varphi'(v_0)$$

Mas,

$$\varphi'(v_{n_j}) \to 0$$

Portanto, pela unicidade do limite, temos

$$\varphi'(v_0) = 0$$

Portanto,

$$\varphi(v_0) = c \qquad \text{e} \qquad \varphi'(v_0) = 0$$

Logo, $v_0 \in K_c \quad$ e $\quad \varphi(v_0) = \inf_X \varphi$
agora mostremos (ii)

Devemos mostrar que existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$\| x_n \| \to \infty \quad \varphi(x_n) \to d \quad \text{e} \quad \| \varphi'(x_n) \| \to 0$$

Para isto, defina para $r \geq 0$ a função

$$m(r) = \inf_{\|u\| \geq r} \varphi(u)$$

Afirmação 6 *: $m(r)$ é não decrescente*

De fato, dados $0 \leq r_1 < r_2$, temos

$$m(r_1) = \inf_{\|u\| \geq r_1} \varphi(u) \leq \inf_{\|u\| \geq r_2} \varphi(u) = m(r_2)$$

Afirmação 7 $\lim_{r \to \infty} m(r) = d$

De fato,

$$\lim_{r \to \infty} m(r) = \lim_{r \to \infty} \inf_{\|u\| \geq r} \varphi(u) = \lim_{\|u\| \to \infty} \inf \varphi(u) = d$$

Para $\varepsilon < \frac{1}{2}$, fixe $r_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ tal que para $r \geq r_0$, temos

$$d - \varepsilon^2 \leq m(r)$$

(de fato, $\| m(r) - d \| \leq \varepsilon^2 \Rightarrow -\varepsilon^2 \leq m(r) - d \Rightarrow d - \varepsilon^2 \leq m(r)$)
Escolha u_0 com $\| u_0 \| \geq 2r_0$,então

$$m(2r_0) = \inf_{\|u\| \geq 2r_0} \varphi(u) \quad \text{e} \quad \varphi(u_0) \leq \inf_{\|u\| \geq r_0} \varphi(u) + \varepsilon^2 = m(2r_0) + \varepsilon^2$$

Logo, $\varphi(u_0) \leq m(2r_0) + \varepsilon^2 \leq d + \varepsilon^2$
Aplicando o teorema de Ekeland na região $D = \{\| u \| \geq r_0\}$, temos que existe v_0 com $\| v_0 \| \geq r_0$ tal que

$$\varphi(v_0) \leq \varphi(u) - \varepsilon \| u - v_0 \| \qquad \forall u \in D$$

Em Particular,

$$\varphi(v_0) \leq \varphi(u_0) - \varepsilon \| u_0 - v_0 \| \quad u_0 \in D$$

Logo, para $r \geq r_0$, temos

$$d - \varepsilon^2 \leq m(r_0) = \inf_{\|u\| \geq r_0} \varphi(u) \leq \varphi(v_0) \leq \varphi(u_0) - \varepsilon \| u_0 - v_0 \|$$

$$\Rightarrow \varepsilon \parallel u_0 - v_0 \parallel \leq \varphi(u_0) - d + \varepsilon^2 \leq d + \varepsilon^2 - d + \varepsilon^2 = 2\varepsilon^2$$

Portanto,

$$\parallel u_0 - v_0 \parallel \leq 2\varepsilon \quad \text{e} \quad \parallel v_0 \parallel > r_0$$

Sendo v_0 pertencente ao interior da região D, pelo corolário 1, temos

$$\parallel \varphi'(v_0) \parallel \leq \varepsilon$$

Portanto,

$$\parallel \varphi(v_0) \parallel \rightarrow 0$$

■

Corolário 4 *: Seja φ uma função de classe C^1 em um espaço de Banach X satisfazendo a condição de (PS) em X. Se u_0 é um mínimo local para φ então existe $\varepsilon > 0$ tal que*
(i) Ou, $\varphi(u_0) < \inf\{\varphi(u); \parallel u - u_0 \parallel = \alpha\}$ para algum $0 < \alpha < \varepsilon$
(ii) Ou, para cada α com $0 < \alpha < \varepsilon$, φ tem um mínimo local num ponto u_α com $\parallel u_\alpha - v_0 \parallel = \alpha$ e $\varphi(u_\alpha) = \varphi(u_0)$

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varphi(u_0) \leq \varphi(u) \quad \text{para} \quad \parallel u_0 - v_0 \parallel \leq \varepsilon$$

Suponha que (i) não seja satisfeita, então dado α com $0 < \alpha < \varepsilon$, temos

$$\varphi(u_0) = \inf\{\varphi(u); \parallel u - u_0 \parallel = \alpha\} \qquad (1)$$

Seja $\delta > 0$ tal que $0 < \alpha - \delta < \alpha + \delta < \varepsilon$ e considere a restrição de φ no anel

$$R = \{u \in X \ ; \ \alpha - \delta \ \leq \parallel u - u_0 \parallel \leq \ \alpha + \delta\}$$

De (1), podemos encontrar uma sequência $(u_n)_n$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\parallel u_n - u_0 \parallel = \alpha \quad \text{e} \quad \varphi(u_n) \leq \varphi(u_0) + \frac{1}{n} \qquad (2)$$

Ou seja,

$$\varphi(u_n) \leq \inf_R \varphi + \frac{1}{n}, \quad \text{com} \quad \parallel u_n - u_0 \parallel = \alpha$$

Logo, pelo Teorema de Ekeland, existe (v_n) em $\mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(v_n) \leq \varphi(u_n), \quad \parallel v_n - u_n \parallel \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \varphi(v_n) \leq \varphi(u) + \frac{1}{n} \parallel u - u_n \parallel \forall u \in \mathbb{R}$$

Para n muito grande, de (3) temos que (v_n) está no interior de R. Logo,

$$\| \varphi'(v_n) \| \leq \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \| \varphi'(v_n) \| \to o \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

A condição (PS) implica que existe uma subsequência de $(v_n)_n$ convergindo para u_α. Ou seja,

$$\text{existe } (v_{n_k}) \ \text{ de } \ (v_n)_n \ \text{ tal que } \ v_{n_k} \to \ u_\alpha$$

Sendo φ contínua, temos que $\varphi(v_{n_k}) \to \varphi(u_\alpha)$
Mas, $\varphi(v_{n_k}) \ \to \ \varphi(u_0)$.
Portanto, $\varphi(u_\alpha) = \varphi(u_0)$ e $\varphi'(u_\alpha) = 0$
Logo, φ tem um mínimo local em u_α e $\| u_\alpha - u_0 \| = \alpha$ quando $\varphi(u_\alpha) = \varphi(u_0)$.

Por outro lado, se u_0 é um mínimo local estrito, então é claro que (ii) não é verdade e portanto, podemos obter um $\alpha > 0$ tal que

$$\varphi(u_0) < \inf\{\varphi(u); \| u - u_0 \| = \alpha\}$$

■

Capítulo 6

Identidades Variacionais

Neste capítulo faremos uma explanação formal de algumas identidades variacionais. Também faremos aplicações da identidade de Pohozaev, para concluir a não existência de soluções de equações do tipo:

$$\begin{cases} -\triangle u = g(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u \in H_o^1(\Omega) \end{cases}$$

onde g é contínua de $\mathbb{R}$ nele mesmo e Ω um domínio aberto de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

A demonstração da identidade de Pohozaev será feita em domínios limitado e não limitado. O primeiro caso tem como texto guia o livro ***Minimax Theorems*** de Michel Willem, já o outro caso, o livro ***Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*** de Otared Kavian.

6.1 Motivação - Teorema Virial

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\varphi \in C^1(H_o^1(\Omega), \mathbb{R})$ dada por

$$\varphi(v) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(v(x)) dx$$

Notemos que uma solução u de $-\triangle u = g(u)$, com $u \in H_o^1(\mathbb{R}^N)$, é um ponto crítico de φ sobre seu espaço, onde G é a primitiva de g. Em particular a derivada no sentido de Gateaux de φ em u, independente de qual seja a direção é nula.

Agora para $\lambda > 0$ definamos $u_\lambda(x) := u(x/\lambda)$ e $f(\lambda) := \varphi(u_\lambda)$, observe que $f(1) = \varphi(u)$, o que implica que $f'(1) = 0$.

Por outro lado, calculando $f(\lambda)$, obtemos:

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, dx - \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx$$

onde utilizamos uma mudança de variável e o fato que o determinante da matriz jacobiana é λ^N.

Logo, temos que:

$$f'(1) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx,$$

mas $f'(1) = 0$ e portanto obtemos:

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx.$$

Assim, obtemos um resultado ***a priori*** (supomos que u era um ponto crítico de φ). Tal resultado é comumente chamado pelos físicos de ***Teorema Virial***. A seguir veremos que tal teorema é uma consequência direta da identidade de Pohozaev. Sendo assim, se pensarmos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ a pergunta natural que fazemos é:

Será que sobre algumas hipóteses para um domínio Ω de $\mathbb{R}^N$, obtemos alguma igualdade semelhante a esta?

6.2 Identidade de Pohozaev em Domínios Limitados

Consideremos o problema

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \begin{cases} -\triangle u = g(u) & \text{em } \Omega \\ u \in H_o^1(\Omega) \end{cases}$$

onde g é contínua de $\mathbb{R}$ nele mesmo e Ω um domínio aberto limitado de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

Definamos a primitiva de g por:

$$G(u(x)) = \int_0^{u(x)} g(s)ds.$$

Teorema 6.1 (Identidade de Pohozaev em domínios limitados, 1965) *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ uma solução de $(\mathcal{P}_1)$ tal que $G(u) \in L^1(\Omega)$. Então u satisfaz:*

$$\frac{N-2}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2\, \sigma \cdot n(\sigma)d\sigma = N\int_{\Omega} G(u(x))dx$$

onde $n(\sigma)$ denota a normal unitária exterior de $\partial\Omega$.

Prova: Por $(\mathcal{P}_1)$ temos que: $0 = \triangle u(x) + g(u(x))$. Multiplicando ambos os membros desta equação por $x \cdot \nabla u(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (\triangle u(x) + g(u(x)))x \cdot \nabla u(x) \\ &= \triangle u(x)(x \cdot \nabla u(x)) + g(u(x))x \cdot \nabla u(x) \\ &= \triangle u(x)(x \cdot \nabla u(x)) + G'(u(x))x \cdot \nabla u(x) \\ &= \triangle u(x)(x \cdot \nabla u(x)) + x \cdot \nabla G(u(x)) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} div(xG(u(x))) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i G(u(x))) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i} G(u(x)) + x_i \frac{\partial G(u(x))}{\partial u(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(G(u(x)) + x_i G'(u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) \\ &= NG(u(x)) + x \cdot \nabla G(u(x)) \end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$x \cdot \nabla G(u(x)) = div(xG(u(x))) - NG(u(x)) \tag{6.2}$$

Além disso , observermos que

$$\begin{aligned} div(\nabla u(x)(x \cdot \nabla u(x))) &= div \left(\nabla u(x) \left(\sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \\ &= \triangle u(x)(x \cdot \nabla u(x)) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{N} x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \triangle u(x)(x \cdot \nabla u(x)) + |\nabla u(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^{N} x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{|\nabla u(x)|^2}{2}\right) &= \frac{1}{2}\nabla\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}2\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

Substituindo em 6.3, obtemos:

$$\begin{aligned}
\triangle u(x)(x\cdot\nabla u(x)) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6.4)\\
&= div(\nabla u(x)(x\cdot\nabla u(x))) - |\nabla u(x)|^2 - x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u(x)|^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Mas, notemos ainda que:

$$\begin{aligned}
div\left(x\cdot\frac{|\nabla u(x)|^2}{2}\right) &= \sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)^2\right)\\
&= \frac{N}{2}|\nabla u(x)|^2 + x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u(x)|^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$-x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u(x)|^2}{2}\right) = -div\left(x\cdot\frac{|\nabla u(x)|^2}{2}\right) + \frac{N}{2}|\nabla u(x)|^2$$

Substituindo em 6.4, segue-se que

$$\begin{aligned}
\triangle u(x)(x\cdot\nabla u(x)) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6.5)\\
&= div\left(\nabla u(x)(x\cdot\nabla u(x)) - x\cdot\frac{|\nabla u(x)|^2}{2}\right) + \frac{N-2}{2}|\nabla u(x)|^2
\end{aligned}$$

Agora, substituindo 6.2 e 6.5 em 6.1, obtemos:

$$0 = div\left(\nabla u(x)(x\cdot\nabla u(x)) - x\cdot\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} + xG(u(x))\right) - NG(u(x)) + \frac{N-2}{2}|\nabla u(x)|^2$$

Integrando sobre Ω, temos

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \int_\Omega div\left(\nabla u(x)(x\cdot\nabla u(x)) - x\cdot\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} + xG(u(x))\right)dx$$
$$= N\int_\Omega G(u(x))dx$$

Usando o Teorema da Divergência (***olhe apêndice***), obtemos:

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \int_{\partial\Omega}\left[\nabla u(\sigma)(\sigma\cdot\nabla u(\sigma)) - \sigma\frac{|\nabla u(\sigma)|^2}{2} + \sigma G(u(\sigma))\right]n(\sigma)d\sigma$$
$$= N\int_\Omega G(u(x))dx$$

Mas, sabemos que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, donde temos que $G(u(x)) = 0$ sobre $\partial\Omega$ e além disso ∇u é paralelo a n ***(veja prova no apêndice)***, isto é,

$$\nabla u(\sigma) = (\nabla u(\sigma)\cdot n(\sigma))n(\sigma)$$

Logo,

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2\,\sigma\cdot n(\sigma)d\sigma = N\int_\Omega G(u(x))dx$$

■

6.3 Identidade de Pohozaev em Domínios Não Limitados

Teorema 6.2 (Identidade de Pohozaev em domínios não limitados) *Sejam Ω um aberto de classe C^1, g uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e designemos por G a primitiva de g, se anulando em 0, e $u \in H^1_o(\Omega)\cap H^2_{loc}(\overline{\Omega})$ uma função satisfazendo a equação*

$$-\triangle u = g(u)$$

Se $G(u) \in L^1(\Omega)$ e $n(\sigma)$ designa a normal exterior de $\partial\Omega$, então para todo $z^* \in \mathbb{R}^N$ fixo, u satisfaz a identidade:

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2\,(\sigma - z^*)\cdot n(\sigma)d\sigma = N\int_\Omega G(u(x))dx.$$

Em particular se $\Omega = \mathbb{R}^N$, para $1 \le j \le N$, temos que

$$\int_\Omega |\partial_j u(x)|^2\,dx = \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^2\,dx,$$

e

$$N-2\int_\Omega |\partial_j u(x)|^2\,dx = 2N\int_\Omega G(u(x))dx.$$

Prova: Seja φ_o uma função de classe C^∞ sobre $[0,\infty)$ tal que $\varphi_o(t) = 1$ para $t \in [0,1]$ e $\varphi_o(t) = 0$ para $t \in [2,\infty)$.

Definamos para $j \geq 1$ inteiro,

$$\varphi_j(x) = \varphi_o\left(\frac{|x|}{j}\right)$$

Afirmamos que:

1. $\varphi_j(x) \leq C$, onde C não depende de j e
2. $|x|\,|\nabla\varphi_j(x)| \leq \dfrac{|x|}{j}\,|\varphi_o'\,(|x|\,/j)| \leq C\,\|\varphi_o'\|_\infty$

Prova da Afirmação 1: De fato, notemos que: $\varphi_j(x) = 1$ se $\dfrac{|x|}{j} \leq 1$ e $\varphi_j(x) = 0$ se $\dfrac{|x|}{j} \geq 2$ e no intervalo $[1,2]$, como φ_o é contínua e $[1,2]$ é compacto, temos que:

$$\varphi_j(x) = \varphi_o\left(\frac{|x|}{j}\right) \leq C$$

que não depende de j pois está no intervalo $[1,2]$. ∎

Prova da Afirmação 2: De fato, temos que

$$\varphi_{x_i}(x) = \varphi_o'(|x|\,/j)\frac{x_i}{|x|}\frac{1}{j},$$

donde:

$$(\varphi_{x_i}(x))^2 = [\varphi_o'(|x|\,/j)]^2\,\frac{x_i^2}{|x|^2}\frac{1}{j^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\nabla\varphi_j(x)|^2 &= \sum_{i=1}^{N}[\varphi_o'(|x|\,/j)]^2\,\frac{x_i^2}{|x|^2}\frac{1}{j^2}\\
&= [\varphi_o'(|x|\,/j)]^2\,\frac{|x|^2}{|x|^2}\frac{1}{j^2}\\
&= \frac{1}{j^2}\,[\varphi_o'(|x|\,/j)]^2\\
&\leq \frac{1}{j^2}\,|\varphi_o'(|x|\,/j)|^2
\end{aligned}$$

ou seja

$$|\nabla\varphi_j(x)| \leq \frac{1}{j}\,|\varphi_o'(|x|\,/j)|$$

Notemos que $\varphi_o'(|x|/j) \neq 0$ somente no intervalo $[1,2]$.
O que implica que,

$$\begin{aligned} |x|\,|\nabla\varphi_j(x)| &\leq \frac{|x|}{j}\,|\varphi_o'(|x|/j)| \\ &\leq \frac{|x|}{j}\frac{|x|}{j}\,\|\varphi_o\|_\infty \\ &= \frac{|x|^2}{j^2}\,\|\varphi_o\|_\infty \\ &\leq C\,\|\varphi_o\|_\infty \end{aligned}$$

■

Assim, para um índice i fixo multipliquemos os dois membros da equação $\triangle u = g(u)$ por $(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)$. Integrando o termo da direita, obtemos:

$$\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx \int_\Omega (x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i G(u(x))dx$$

Integrando por partes obtemos:

$$\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = (x_i - z_i^*)\varphi_j(x)G(u(x))|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \partial_i[(x_i - z_i^*)\varphi_j(x)]G(u(x))dx$$

Como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ temos que $G(u) = 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim,

$$\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = -\int_\Omega \varphi_j(x)G(u(x))dx - \int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i\varphi_j(x)G(u(x))dx$$

Observemos que, quando $j \to \infty$ então $\dfrac{|x|}{j} \to 0$. Donde $\varphi_j(x) \to 1$ e $\partial_i\varphi_j(x) \to 0$ quando $j \to \infty$.

Logo, passando o limite na igualdade acima e usando o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (***onde estamos utilizando as afirmações 1 e 2***) obtemos:

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)dx = -\int_\Omega G(u(x))dx \tag{6.6}$$

Por outro lado, integrando a parte esquerda da equação e usando a fórmula de Green (***apêndice***) vem que:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \triangle u(x)\left((x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\right)\varphi_j(x)dx &= -\int_{\partial\Omega}\left((\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma)\right)\varphi_j(\sigma)\nabla u(\sigma)\cdot n(\sigma)d\sigma \\ &+ \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\left[(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right]dx \end{aligned} \tag{6.7}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\nabla u(x)\cdot\nabla\left[(x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right] &= \nabla u(x)\cdot\left[\partial_i u(x)\varphi_j(x)+\right.\\
&+ \nabla\left(\partial_i u(x)\right)\varphi_j(x)(x_i-z_i^*)+\\
&+ \left.(x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\nabla\varphi_j(x)\right]\\
&= \nabla u(x)\cdot\left(\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right)+\\
&+ \nabla u(x)\cdot\partial^2_{ik}u(x)\varphi_j(x)(x_i-z_i^*)+\\
&+ \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)(x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\\
&= \left|\partial_i u(x)\right|^2\varphi_j(x)+\\
&+ \sum_{k=1}^{N}\left(\partial_k u(x)\partial^2_{ik}u(x)\varphi_j(x)(x_i-z_i^*)\right)+\\
&+ (x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)\\
&= \left|\partial_i u(x)\right|^2\varphi_j(x)+\\
&+ \frac{1}{2}(x_i-z_i^*)\varphi_j(x)\sum_{k=1}^{N}2.\partial_k u(x)\partial^2_{ik}u(x)+\\
&+ (x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)\\
&= \left|\partial_i u(x)\right|^2\varphi_j(x)+\\
&+ \frac{1}{2}(x_i-z_i^*)\varphi_j(x)\sum_{k=1}^{N}\partial_i\left[(\partial_k u(x))^2\right]+\\
&+ (x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)\\
&= \left|\partial_i u(x)\right|^2\varphi_j(x)\\
&+ \frac{1}{2}(x_i-z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i\left[\left|\nabla u(x)\right|^2\right]+\\
&+ (x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)
\end{aligned}$$

Assim, a segunda integral de 6.7 fica:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\left[(x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\varphi_j(x)\right]dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega (x_i-z_i^*)\varphi_j(x)\partial_i\left[\left|\nabla u(x)\right|^2\right]dx+\\
&+ \int_\Omega \left|\partial_i u(x)\right|^2\varphi_j(x)dx+ \qquad (6.8)\\
&+ \int_\Omega (x_i-z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi_j(x)dx
\end{aligned}$$

Denotemos por E_{1j}, E_{2j}, E_{3j} os três termos da direita de 6.8 respectivamente. Notemos que quando $j\to\infty$ então:

$$E_{3j}\to 0,\quad \text{pois}\ \ \nabla\varphi_j(x)\to 0\ \ \text{e}$$

$$E_{2j} \to \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 \, dx \quad \text{pois} \quad \varphi_j(x) \to 0.$$

Além disso, pela fórmula de Green E_{1j}, se escreve

$$E_{1j} = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \partial_i \left[(x_i - z_i^*)\varphi_j(x)\right] dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 \, (\sigma_i - z_i^*)\varphi_j(\sigma) n_i(\sigma) d\sigma$$

Logo, quando $j \to \infty$, temos que

$$E_{1j} \to -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 \, (\sigma_i - z_i^*) n_i(\sigma) d\sigma$$

Assim, passando ao limite quando $j \to \infty$ e usando novamente o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, em 6.7 obtemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \left[-\int_\Omega \triangle u(x) \left((x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\right) \varphi_j(x) dx \right] &= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \\ &+ \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 \, dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 \, (\sigma_i - z_i^*) n_i(\sigma) d\sigma - \\ &- \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma) \nabla u(\sigma) \cdot n(\sigma) d\sigma \end{aligned} \tag{6.9}$$

Igualando 6.6 e 6.9 temos

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \\ &+ \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 \, dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 \, (\sigma_i - z_i^*) n_i(\sigma) d\sigma - \\ &- \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma) \nabla u(\sigma) \cdot n(\sigma) d\sigma = -\int_\Omega G(u(x)) dx \end{aligned} \tag{6.10}$$

Agora passando a soma sobre i e usando o fato de $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ implicar que $\nabla u(\sigma)$ é paralelo a $n(\sigma)$ (***mesmo argumento que no caso limitado***), vem que:

$$\begin{aligned} -\frac{N}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \quad &+ \quad \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 \, (\sigma - z^*) n(\sigma) d\sigma - \\ &- \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 \, (\sigma - z^*) n(\sigma) d\sigma = -N\int_\Omega G(u(x)) dx \end{aligned}$$

O que implica que,

$$\begin{aligned}\frac{-N+2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2\,(\sigma-z^*)n(\sigma)d\sigma &= \\ &= -N\int_{\Omega}G(u(x))dx\end{aligned}$$

, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u(\sigma)|^2\,(\sigma-z^*)n(\sigma)d\sigma &= \\ &= N\int_{\Omega}G(u(x))dx\end{aligned}$$

Se $\Omega=\mathbb{R}^N$ então $\partial\Omega=\varnothing$, de sorte que

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^2\,dx=N\int_{\mathbb{R}^N}G(u(x))dx \tag{6.11}$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^2\,dx=2^*\int_{\mathbb{R}^N}G(u(x))dx$$

Além disso de 6.10, temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_i u(x)|^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^2\,dx-\int_{\mathbb{R}^N}G(u(x))dx,\quad \forall i=1,2,\ldots,N$$

Observemos que o segundo termo da igualdade acima não depende de i e vale para todo $1\leq i\leq N$, logo temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_i u(x)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_1 u(x)|^2\,dx$$

Donde,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\left[\sum_{j=1}^{N}(\partial_j u(x))^2\right]dx=\int_{\mathbb{R}^N}N.\,(\partial_j u(x))^2\,dx$$

Assim, substiuindo em 6.11 obtemos:

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}N.\,|\partial_j u(x)|^2\,dx=N\int_{\mathbb{R}^N}G(u(x))dx$$

E portanto,

$$N-2\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_j u(x)|^2\,dx=2\int_{\mathbb{R}^N}G(u(x))dx$$

■

6.4 Aplicações

Exemplo 1 *Seja* $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ *e* $g(s) := \lambda |s|^{p-1} s$, *com* $p \geq 1$ *e* $\lambda \neq 0$. *Suponhamos que* $u \in H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *verifica:*

$$-\triangle u = \lambda |u|^{p-1} u.$$

Primeiramente observemos que $\partial\Omega = \varnothing$.
Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por u obtemos:

$$-\triangle u(x)u(x) = \lambda |u(x)|^{p-1} u(x)u(x) = \lambda |u(x)|^{p-1} |u(x)|^2 = \lambda |u(x)|^{p+1}$$

Integrando obtemos:

$$\int_\Omega -\triangle u(x)u(x)dx = \lambda \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx$$

Mas, sabemos que pela fórmula de Green

$$\int_\Omega -\triangle u(x)u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx$$

Donde,

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx = \lambda \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx$$

Por outro lado, temos que

$$G(u(x)) = \int_0^{u(x)} g(s)ds = \lambda \int_0^{u(x)} |s|^{p-1} sds = \lambda \frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1}$$

Logo, pela identidade de Pohozaev, vem que

$$\lambda \left(\frac{N-2}{2}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx = \lambda \left(\frac{N}{p+1}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx$$

Ou seja,

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx = 0$$

Portanto,

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1} = 0 \Rightarrow p+1 = 2^*$$

Assim, a equação $-\triangle u = \lambda |u|^{p-1} u$ só tem solução não nula em $H_o^1(\Omega)$ no caso crítico. Se $N = 2$ a equação não tem solução não nula.

Exemplo 2 *Seja* Ω *um aberto limitado regular e* $g(s) := |s|^{p-1} s$. *Suponnhamos que* $u \in H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *verifica:*

$$-\triangle u = |u|^{p-1} u.$$

Da mesma forma que no exemplo anterior, temos que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla u(x)dx = \int_\Omega |u(x)|^{p+1}\,dx$$

e

$$\int_\Omega G(u(x))dx = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u(x)|^{p+1}\,dx$$

A identidade de Pohozaev nos dá que:

$$\left(\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1}\right)\int_\Omega |u(x)|^{p+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2\,(\sigma - z^*)n(\sigma)d\sigma \quad (6.12)$$

Suponhamos que o aberto Ω é estrelado com relação ao ponto $z^* \in \mathbb{R}^N$ (***definição no apêndice***), por exemplo(para simplificar) $z^* = 0$. Logo, $\forall\sigma \in \partial\Omega,\quad \sigma\cdot n(\sigma) > 0$ (***prova no apêndice***)

Então, se

$$\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1} > 0 \Rightarrow p+1 > 2^* \quad \text{(caso supercrítico)}$$

obtemos por 6.12

$$0 \le \left(\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1}\right)\int_\Omega |u(x)|^{p+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2\,\sigma\cdot n(\sigma)d\sigma < 0$$

Donde

$$\int_\Omega |u(x)|^{p+1}\,dx = 0 \Rightarrow |u(x)|^{p+1} = 0 \Rightarrow u(x) = 0, \quad \forall x\in\Omega$$

Se, por outro lado considerarmos

$$\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1} = 0 \Rightarrow p+1 = 2^* \quad \text{(caso crítico)}$$

obtemos por 6.12

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2\,\sigma\cdot n(\sigma)d\sigma = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega$$

Se $u \ge 0$, temos pelo teorema de Green que:

$$0 = -\int_{\partial\Omega} \nabla u(\sigma)\cdot n(\sigma)d\sigma = \int_\Omega -\triangle u(x)dx = \int_\Omega u(x)^p dx$$

O que implica que, $u \equiv 0$ em Ω. Portanto, a equação não tem solução não nula nos casos crítico e supercrítico.

Apêndice

Teorema 6.3 (Teorema da Divergência) *Seja Ω uma aberto de classe C^1. Se $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$, para $1 \leq i \leq N$ então temos a fórmula de integração por partes:*

$$\int_\Omega \partial_i u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)n_i(\sigma)d\sigma.$$

De forma equivalente, se $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ e $div(u) := \sum_{i=1}^{N} \partial_i u_i$, então

$$\int_\Omega div(u(x))dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\cdot n(\sigma)d\sigma.$$

Corolário 1 (Fórmula de Green) *Sejam Ω um aberto de classe C^1 e u, v duas funções de classe $C_c^2(\mathbb{R}^N)$. Então temos:*

$$\int_\Omega \left[v(x)\triangle u(x) - u(x)\triangle v(x)\right]dx = \int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma)v(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial n}(\sigma)u(\sigma)\right]d\sigma \quad ,$$

$$-\int_\Omega v(x)\triangle u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma)v(\sigma)d\sigma.$$

Teorema 6.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$ convergindo em quase toda parte para uma função mensurável f. Suponha que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$ temos $|f_n| \leq g$ q.s sobre Ω. Então $f \in L^1(\Omega)$ e:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0 \quad ,$$

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)dx.$$

Definição 1 *Um conjunto Ω diz-se estrelado com respeito a origem, ou seja, a 0 se para cada $x \in \overline{\Omega}$ o segmento de reta*

$$\lambda x, \quad com \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

está em $\overline{\Omega}$.

Note que, claramente se Ω é convexo e $0 \in \Omega$, então Ω é estrelado com respeito a 0. Mas, em geral regiões estreladas não são convexas.

Lema 6.5 (Normal para uma Região Estrelada) *Assuma $\partial\Omega$ é C^1 e Ω estrelado com respeito a origem. Então*

$$x \cdot n(x) \geq 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in \partial\Omega \quad ,$$

onde n denota a normal unitária exterior.

Prova: Como $\partial\Omega$ é C^1, se $x \in \partial\Omega$ então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta$ e $y \in \overline{\Omega}$ implica $n(x) \cdot \dfrac{(y-x)}{|y-x|} \leq \varepsilon$. Em particular, temos

$$\overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \overline{\Omega}}}}\, n(x) \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \leq 0$$

Seja $y = \lambda x$ para $0 < \lambda < 1$. Então $y \in \overline{\Omega}$, pois Ω é estrelado. Logo,

$$n(x) \cdot \frac{x}{|x|} = -\lim_{\lambda \to 1^-} n(x) \cdot \frac{(\lambda x - x)}{|\lambda x - x|} \geq 0.$$

■

Proposição 6.6 *Se $u \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, então ∇u é paralelo a n, onde n denota a normal exterior de Ω.*

Prova: Consideremos V_o vizinhança de $p_0 \in \partial\Omega$. Notemos que,

$$\partial\Omega \cap V_o = \varphi^{-1}(c_0),$$

isto é, imagem inversa de um valor regular c_0 pela função φ.

Consideremos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \partial\Omega \cap V_o$, com $\alpha(0) = p_0$.

Logo, temos que

$$h(t) = (u \circ \alpha)(t) = u(\alpha(t)) = 0,$$

e portanto,

$$h'(t) =< \nabla u(\alpha(t)), \alpha'(t) >= 0$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Haim Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson Paris, 1987

[2] de Figueiredo, D. G. Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[3] Kavian, Otared Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. Mathématiques Applications, 13. Springer-Verlag, Paris, 1993.

[4] Rabinowitz, Paul H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[5] Willem, Michel Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.