UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PLANO DE TRABALHO PARA O BOLSISTA

INICIAÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA GEOMÉTRICA DOS PONTOS CRÍTICOS

PIBIC-CNPq-UFPB-2003

IDENTIFICAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO

1. TÍTULO DO PLANO DE TRABALHO:

   Iniciação ao Estudo da Teoria Geométrica dos Pontos Críticos

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

   Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I

3. ÁREA DE PESQUISA:

   Análise

4. SUB-ÁREAS DE PESQUISA:

   Equações Diferenciais Parciais e Geometria Diferencial

5. ORIENTADOR:

   Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

6. COORIENTADOR:

   Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

6. ORIENTANDO:

   Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

7. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

   agosto de 2003 a julho de 2004

INTRODUÇÃO

Tentativas de explicar fenômenos físicos, através do príncipio de que existe na natureza alguma “quantidade” a ser minimizada, motivou desde tempos remotos (c. 125 aC) à formulação de um princípio variacional.

Registro de uma formulação efetiva só tivemos a partir do sec. XVII, quando Pierre de Fermat postulou que a “luz minimiza o tempo transcorrido ao invés da distância percorrida”. Daí deduziu-se matematicamente as leis que descrevem o fenômeno da refração da luz, abrindo as portas para que outros pesquisadores estabelecessem as ferramentas matemáticas necessárias para a abordagem de problemas variacionais mais complexos. Surge então o início do desenvolvimento da teoria Clássica do Cálculo das Variações.

Mas foi o suíço Leonhard Euler quem primeiro escreveu e publicou um trabalho sobre o Cálculo das Variações. Trabalho este que influenciou gerações de destacados matemáticos até os dias de hoje.

Seguindo Euler, Maupertius publicou um trabalho onde pela primeira vez aparece o princípio da “ação mínima”. E na sequência citamos Louis de Lagrange, Le Gendre, Karl Jacobi e Hamilton, matemáticos que consolidaram o Cálculo das Variações.

Atualmente, o Cálculo das Variações é tema de inúmeros trabalhos de renomados matemáticos. Sua aplicabilidade em várias ciências como Biologia, Economia e Engenharia tem atraído muitos talentos para a pesquisa em Matemática. A beleza e as técnicas utilizadas no Cálculo das Variações têm colaborado de forma prática e objetiva nos trabalhos de iniciação científica.

Neste projeto, o candidato ja tem sido instruído por volta de um ano. Vem trabalhado de forma assídua, perseverante e disciplianada. Demonstra um grande talento para a matemática e integrou-se de forma produtiva no nosso grupo de pesquisa. Possui base suficiente para desenvolver um estudo satisfatório da “Teoria Geométrica dos Pontos Críticos”.

O objetivo e conteúdo específico do projeto destacamos a seguir.

OBJETIVOS DO PLANO DE TRABALHO

Do ponto de vista específico da pesquisa, nosso objetivo principal é a compreensão geométrica do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz utilizando a idéia geométrica de Minimax e o lema da Deformação.

Para isto, faremos uma rápida introdução aos Métodos Variacionais modernos com forte ênfase na interpretação geométrica dos resultados listados no conteúdo do projeto, observando sempre as técnicas de demonstração com todo rigor matemático.

METODOLOGIA

Faremos também uso da **metodologia** tradicional, a qual tem sido feita com sucesso nas iniciações à pesquisa em matemática, isto é, realizações de seminários semanais com lista de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

DETALHAMENTO DO PLANO DE TRABALHO

Para atingir nosso objetivo, precisaremos seguir uma trilha que vai da introdução histórica ao Cálculo das Variações Clássico, destacando o Princípio de Dirichlet que, como pedra fundamental, servi-nos-á de 1) exemplo de aplicação dos métodos do Cálculo das Variações; 2) motivação para o desenvolvimento de teorias modernas; 3) o conceito de solução fraca e espaço de Sobolev. Da formulação fraca partimos para a discussão geométrica do problema da minimização para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Chegando ao final da trilha no teorema do Passo da Montanha. O detalhamento pode ser lido a seguir.

1. Introdução aos Métodos Variacionais
   (a) O Cálculo das Variações
   (b) O Princípio da Ação Mínima
   (c) O Princípio de Dirichlet
   (d) Do clássico ao Moderno
   (e) O Método Variacional
2. Espaços de Funções
   (a) Introdução
   (b) Derivadas Fracas

(c) Espaços de Sobolev

(d) Solução Fraca

3. O Método Variacional Direto

    (a) A Forma Fraca do Princípio de Dirichlet
    (b) O Caso de Dimensão Finita
    (c) O Problema da Compacidade
    (d) Semicontinuidade Inferior
    (e) A Desigualdade de Poincaré
    (f) A Solução Fraca do Problema de Dirichlet
    (g) Regularidade das Soluções Fracas

4. O Teorema do Passo da Montanha

    (a) Os Métodos Minimax
    (b) A Geometria do Passo da Montanha
    (c) A Condição de Compacidade de Palais-Smale
    (d) O Lema da Deformação
    (e) A Prova do Teorema do Passo da Montanha
    (f) Aplicação a um Problema Elíptico superlinear

5. O Teorema do Ponto de Sela

    (a) Breve Introdução a Teoria do Grau Topológico de Brower
    (b) A Geometria do Teorema do Ponto de Sela
    (c) A Condição de Compacidade de Palais-Smale
    (d) A Prova do Teorema do Ponto de Sela
    (e) Aplicação a um Problema Elíptico com Ressonância

Cronograma de Execução

O conteúdo deste plano será executado em duas etapas descritas a seguir:

Primeira Etapa: de agosto a dezembro de 2003.

Faremos uma introdução aos Métodos Variacionais e a seguir estudaremos os Espaços das Funções, terminando a primeira etapa com o Método Variacional Direto.

Segunda Etapa: de janeiro a julho de 2004.

Aplicaremos os conceitos estudados na primeira etapa para estudarmos o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema do Ponto de Sela

References

[1] Haim Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson Paris, 1987

[2] de Figueiredo, D. G. Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[3] Kavian, Otared Introduction la thorie des points critiques et applications aux problmes elliptiques. Mathmatiques Applications, 13. Springer-Verlag, Paris, 1993.

[4] Rabinowitz, Paul H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[5] Willem, Michel Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.