**Questão 01** [ 2,00 pts ]

Mostre que a equação $m + \sqrt{x} = x$ tem solução única quando $m > 0$ ou $m = -\frac{1}{4}$, tem duas soluções quando $-\frac{1}{4} < m \leqslant 0$ e nenhuma solução quando $m < -\frac{1}{4}$. Interprete graficamente este resultado.

**Solução**

Inicialmente, observe que $m + \sqrt{x} = x$ implica $x \geqslant 0$ e $x \geqslant m$. Desta forma, temos

$$m + \sqrt{x} = x \iff \sqrt{x} = x - m \overset{x \geqslant 0}{\iff} x = (x-m)^2 \iff x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0.$$

Isto nos dá

$$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2}.$$

Desta forma, se $m < -\frac{1}{4}$ a equação não tem raiz real. Se $m = -\frac{1}{4}$, a equação tem uma única solução $x = \frac{1}{4}$. Se $m > -\frac{1}{4}$ devemos verificar se as soluções são não-negativas e se $x_1 \geqslant m$ e $x_2 \geqslant m$. Temos

$$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geqslant \sqrt{4m+1} \Leftrightarrow (2m+1)^2 \geqslant 4m+1 \Leftrightarrow 4m^2 \geq 0$$

e

$$x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2} > \frac{1}{4} > 0.$$

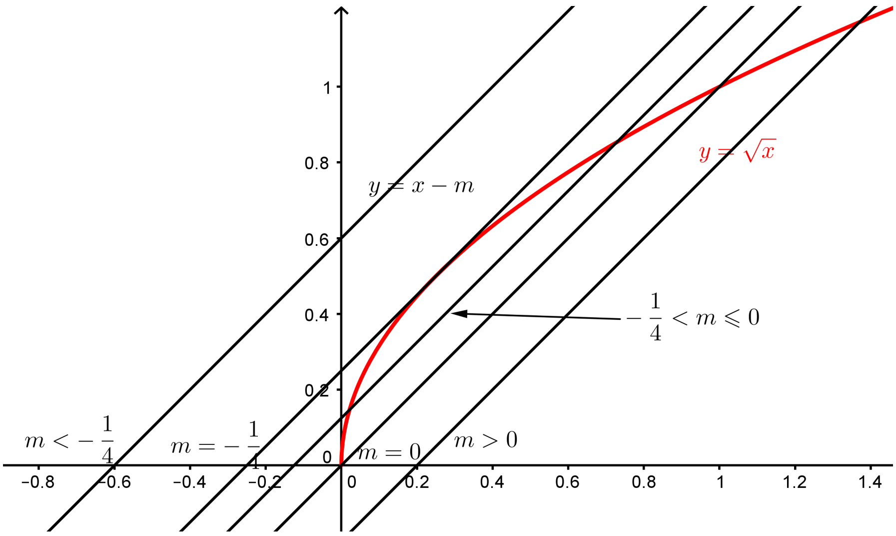
Logo ambas as soluções são não-negativas. Além disso,

$$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2} \geqslant m \Leftrightarrow 1 - \sqrt{4m+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow 4m+1 \leqslant 1 \Leftrightarrow m \leqslant 0$$

e

$$x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2} \geqslant m \Leftrightarrow 1 + \sqrt{4m+1} \geqslant 0.$$

Desta forma, a equação tem duas raízes reais para $-\frac{1}{4} \leqslant m \leqslant 0$ e tem uma única raiz real para $m > 0$. Geometricamente, as soluções são as intesecções das curvas $y = x - m$ e $y = \sqrt{x}$, como mostra a figura.



**Questão 02** [ **2,00 pts** ]

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função real tal que $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e suponha que $f$ satisfaz

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(a) Mostre que $f(0)=1$ e $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

(b) Mostre que $f(nx)=f(x)^n$, para quaisquer $n\in\mathbb{Z}$ e $x\in\mathbb{R}$.

(c) Estendendo o que foi provado no item (b), prove que, para todo $r=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, temos $f(rx)=f(x)^r$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

**Solução**

(a) Temos

$$f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0)=f(0)^2\Rightarrow f(0)(1-f(0))=0\Rightarrow f(0)=1,$$

pois $f(0)>0$ por hipótese. Além disso,

$$1=f(0)=f(x+(-x))=f(x)\cdot f(-x)\Rightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}.$$

(b) Vamos mostrar por indução em $n$. A igualdade é imediata para $n=1$. Supondo que $f(nx)=f(x)^n$, vamos mostrar que $f((n+1)x)=f(x)^{n+1}$. De fato

$$f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)\cdot f(x)=f(x)^n\cdot f(x)=f(x)^{n+1}.$$

(c) Temos

$$f(x)^p=f(px)=f\left(q\cdot\frac{p}{q}x\right)=f\left(\frac{p}{q}x\right)^q\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}x\right)=f(x)^{\frac{p}{q}}.$$

**Questão 03** [ **2,00 pts** ]

Se $I\subseteq\mathbb{R}$ é um intervalo, então uma função contínua $f:I\to\mathbb{R}$ é dita:

(i) **estritamente convexa** se, para quaisquer $x,y\in I$, com $x\neq y$, temos que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)<\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ .

(ii) **estritamente côncava** se, para quaisquer $x,y\in I$, com $x\neq y$, temos que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)>\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ .

Assumindo que as funções a seguir contínuas,

(a) prove que $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é estritamente convexa.

(b) prove que $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ é estritamente côncava.

**Solução**

(a) Temos a seguinte cadeia de equivalências:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2}{x+y} < \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2} \iff$$

$$4 < \frac{x+y}{x} + \frac{x+y}{y} = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \iff 2 < \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \iff$$

$$2xy < x^2 + y^2 \iff (x-y)^2 > 0,$$

onde a última desigualdade é claramente verdadeira para $x \neq y,\ x > 0,\ y > 0$.

(b) Visto que ln é uma função crescente, temos a sequinte cadeia de equivalências:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{\ln x + \ln y}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2} \iff$$

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) > \ln\sqrt{xy} \iff \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} \iff (x+y)^2 > 4xy \iff (x-y)^2 > 0,$$

onde a última desigualdade é claramente verdadeira para $x \neq y,\ x > 0,\ y > 0$.

**Questão 04** **[ 2,00 pts ]**

Sejam $x$ e $y$ números reais quaisquer.

(a) Mostre que $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(b) Mostre que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

**Solução**

(a) Visto que, por definição, $x \leq |x|,\ -x \leq |x|,\ y \leq |y|,\ -y \leq |y|$, temos

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x+y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|.$$

Como $|x+y| = x+y$ ou $|x+y| = -(x+y)$, temos que

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

(b) Usando o item (a) temos

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$$

e

$$|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x-y|.$$

Como $||x| - |y|| = |x| - |y|$ ou $||x| - |y|| = -(|x| - |y|) = |y| - |x|$, concluímos que

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

**Questão 05** **[ 2,00 pts ]**

Se $a$ é irracional, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(ax) + \cos x$ não é periódica.

**Solução**

Vamos mostrar a forma contrapositiva da afirmação, isto é, se $f(x) = \cos(ax) + \cos x$ é periódica, então $a \in \mathbb{Q}$. Seja $T \in \mathbb{R}$ o período de $f$. Temos $f(x+T) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, isto é, $\cos(a(x+T)) + \cos(x+T) = \cos(ax) + \cos x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$, temos

$$\cos(aT) + \cos T = 2.$$

Visto que o valor máximo do cosseno é 1 temos

$$\cos aT = 1 \quad \text{e} \quad \cos T = 1.$$

Isto implica que $aT = 2\pi p$ e $T = 2\pi q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}$, isto é, $a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.