Questão 1 [2,0 pt]

Mostre que, para todo $m > 0$, a equação $\sqrt{x} + m = x$ tem exatamente uma raiz.

Solução

Inicialmente, observe que a equação só faz sentido para $x \geq 0$, e como $\sqrt{x} \geq 0$, temos $x = m + \sqrt{x} \geq m$. Temos

$$\sqrt{x} + m = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - m \Leftrightarrow x = (x-m)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 2mx + m^2 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0,$$

cujas soluções são

$$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2}.$$

Como $x \geq m$, a solução x_2 não é válida. Assim a equação $\sqrt{x} + m = x$ possui uma única solução, a saber

$$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2}.$$

Questão 2 [2,0 pt]

(a) Seja p um número primo. Mostre que $\log_{10} p$ é irracional.

(b) Mais geralmente, dado n um número inteiro positivo, mostre que $\log_{10} n$ é racional se, e somente se, n é uma potência de 10.

Solução

(a) Suponha que $\log_{10} p$ é racional. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, primos entre si, tais que $\log_{10} p = \dfrac{a}{b}$. Temos

$$10^{\frac{a}{b}} = p \Rightarrow 10^a = p^b \Rightarrow 2|p^b \text{ e } 5|p^b \Rightarrow 2|p \text{ e } 5|p,$$

o que é um absurdo, pois p é primo.

(b) Suponha que $\log_{10} n$ seja racional. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, primos entre si, tais que $\log_{10} n = \dfrac{a}{b}$. Temos

$$10^{\frac{a}{b}} = n \Rightarrow 10^a = n^b \Rightarrow 2|n^b \text{ e } 5|n^b \Rightarrow 2|n \text{ e } 5|n.$$

Por outro lado, se um número primo p divide n, então $p|10^a$, e portanto $p = 2$ ou $p = 5$. Logo $n = 2^k 5^r$, mas isto implica

$$10^a = 2^{bk}5^{br} \Rightarrow 2^a 5^a = 2^{bk}5^{br} \Rightarrow bk = a = br \Rightarrow k = r.$$

Assim $n = 10^k$. Reciprocamente, se $n = 10^k$, então $\log_{10} n = k \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

Questão 3 [**2,0 pt**]

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx$. Determine as constantes reais a e b de modo que $f^{-1}(\{3\}) = \{-1, \frac{3}{2}\}$ e, em seguida, determine o conjunto imagem de f.

Solução

Vamos encontrar a e b tais que $f(-1) = f(3/2) = 3$. Temos

$$3 = f(-1) = a - b, \ 3 = f(3/2) = \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b.$$

Resolvendo o sistema de equações lineares acima, temos $a = 2$ e $b = -1$. Assim

$$f(x) = 2x^2 - x.$$

Denotemos por Im f a imagem de $\mathbb{R}$ por f. Como $f(x) = x(2x-1)$ tem raízes em $x = 0$ e $x = 1/2$, a simetria da parábola nos garante que o vértice está localizado no ponto $\left(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4})\right) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$. Como a parábola tem concavidade voltada para cima, podemos induzir que Im $f = [-\frac{1}{8}, \infty)$. Vamos demonstrar este fato. De fato, dado $y \in [-\frac{1}{8}, \infty)$, a equação $2x^2 - x = y$ tem soluções

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1+8y}}{4} \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{1+8y}}{4}.$$

Note que essas soluções só estão bem definidas para $y \geq -\frac{1}{8}$. Isto implica que $[-\frac{1}{8}, \infty) \subseteq \text{Im } f$. Por outro lado,

$$f(x) = 2x^2 - x = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \geq -\frac{1}{8}, \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

de onde segue que Im $f \subseteq [-\frac{1}{8}, \infty)$. Assim Im $f = [-\frac{1}{8}, \infty)$.

Questão 4 [**2,0 pt**]

Seja $p(x)$ um polinômio do sétimo grau tal que

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 10.$$

Sabendo que $p(8) = 30$, determine $p(-3)$.

Solução

Seja $q(x) = p(x) - 10$. Então $q(1) = q(2) = \cdots = q(7) = 0$. Isto implica que $q(x) = a(x-1)(x-2)\cdots(x-7)$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Como $p(8) = 30$, temos $q(8) = 20$. Isto implica $20 = a \times 7!$. Assim,

$$p(x) = \frac{20}{7!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) + 10,$$

de onde segue que

$$p(-3) = \frac{(-1)^7 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + 10 = -2400 + 10 = -2390.$$

Questão 5 [2,0 pt]

(a) Mostre que, para qualquer número real x, vale a identidade

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2=1.$$

(b) Use o item anterior para mostrar que

$$\cos 2t=\frac{1-\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \text{ e } \operatorname{sen} 2t=\frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}.$$

Solução

(a)

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2=\frac{1+x^4+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}=1.$$

(b) Usando o item anterior, vemos que existe $\beta\in[0,2\pi)$ tal que

$$\cos\beta=\frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ e } \operatorname{sen}\beta=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Como $\operatorname{tg}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ é uma função sobrejetiva, existe $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $x=\operatorname{tg} t$. Substituindo $x=\operatorname{tg} t$ nas expressões de $\cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta$ acima, vemos que

$$\cos\beta=\frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}=\cos 2t$$

e

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{2\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}=\operatorname{sen} 2t.$$