Sociedade Brasileira de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA11 – Números e Funções Reais
Avaliação 3 - GABARITO
06 de julho de 2013

1. (1,5 pontos) Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando adequadamente e em detalhes as suas respostas.

(a) (0,5 ponto) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções monótonas crescentes, então a função soma $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ é monótona crescente.

(b) (0,5 ponto) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função limitada superiormente, então f admite um ponto de máximo absoluto.

(c) (0,5 ponto) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite um ponto de máximo local, então f admite um ponto de máximo absoluto.

2. (2,0 pontos) Da mesma forma que se expressa um número real no sistema de numeração decimal, é possível expressá-lo em um sistema de numeração posicional qualquer, de base $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 2$. Dizemos que um número $a \in \mathbb{R}$ está expresso no sistema de base β se ele é escrito na forma:

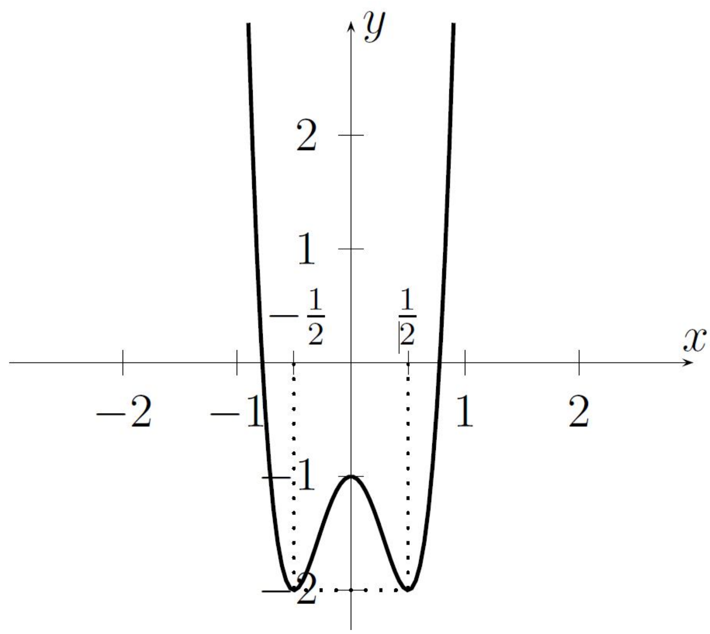
$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \, \beta^{-k}$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e os a_k são dígitos entre 0 e $\beta - 1$ (incluindo-os).

(a) (1,0 ponto) Mostre que, se um número $x \in \mathbb{R}$ é irracional, então x possui representação infinita em toda base β.

(b) (1,0 ponto) Reciprocamente, mostre que, se um número $x \in \mathbb{R}$ possui representação infinita em toda base β, então x é irracional.

3. (2,0 pontos) Considere a função $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_1(x) = (x^2 - 1)^2$. A figura abaixo mostra o gráfico de uma função $p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na forma $p_2(x) = c\, p_1(a\, x - b) + d$, sendo a, b, c e d constantes reais. Determine a, b, c e d. Justifique sua resposta.



4. (2,0 pontos) Considere as funções $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $u(x) = 2^{\operatorname{sen}(x)}$ e $v(x) = \operatorname{sen}(2^x)$.

(a) (1,0 ponto) Determine o maior e menor valores atingidos por u e v.

(b) (1,0 ponto) Esboce os gráficos de u e de v.

5. (2,5 pontos) Considere a função $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^{1-\frac{1}{x}}$.

(a) (1,0 ponto) Faça um esboço o gráfico de g.

(b) (0,75 ponto) Determine todas as soluções reais das equações $g(x) = 2$ e $g(x) = 4$.

(c) (0,75 ponto) Resolva a inequação $g(x) < 4$, para $x \in \mathbb{R}$.

MA11 – Números e Funções Reais
Avaliação 1 – Gabarito

1. (a) Verdadeiro.
   Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como f e g são monótonas crescentes, então $f(x_1) < f(x_2)$ e $g(x_1) < g(x_2)$. Logo, $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$. Portanto, $f + g$ é monótona crescente.

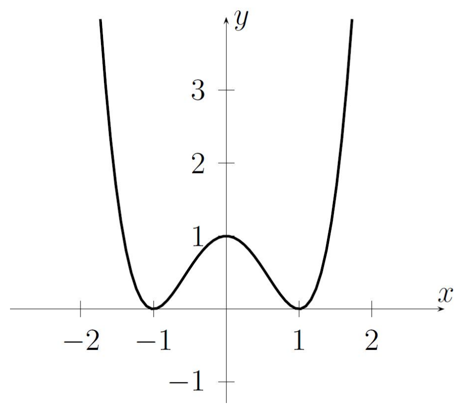
   (b) Falso.
   Contra-exemplo: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2^x$ é limitada superiormente, mas não admite um ponto de máximo absoluto.

   (c) Falso.
   Contra-exemplo: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)^2$ admite um ponto de máximo local em $(0, 1)$, mas não um ponto de máximo absoluto.

2. (a) Suponhamos que x tenha representação finita em alguma base β. Então, pela definição (dada no enunciado da questão), x é soma finita de números racionais, portanto é racional.

   (b) Suponhamos que x seja racional; pelo algoritmo da divisão, podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \leq x < 1$. Então x se escreve na forma $x = \dfrac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq a < b$. Consideremos o sistema de numeração posicional $\beta = b$. Como $x = a\,b^{-1}$, então, por definição, esta é a representação de x na base b (isto é, $x_b = 0, a$). Assim, existe uma base em que x possui representação finita.

3. O gráfico da função p_1 tem o aspecto mostrado na figura abaixo. O gráfico de p_2 é dado pela aplicação de translações e de dilatações no gráfico de p_1.



Observemos primeiro os efeitos da translação e da dilatação horizontais, determinadas pelas constantes a e b. Os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$ são transformados nos pontos $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e $\left(\frac{1}{2},0\right)$, respectivamente. Assim, a distância entre as abscissas desses pontos é multiplicada pelo fator $\frac{1}{2}$. Podemos concluir que $a=2$. Como o eixo de simetria vertical não se altera, não há deslocamento horizontal, isto é, $b=0$.

Passemos agora a analisar a translação e a dilatação verticais, determinadas pelas constantes c e d. Observamos que não há dilatação vertical do gráfico, pois as distâncias entre as ordenadas de pontos do gráfico de p_1 e as distâncias entre as ordenadas dos correspondentes pontos do gráfico de p_2 permanecem as mesmas. Isto pode ser facilmente visto olhando-se os pontos de máximo e de mínimo locais das funções. Segue que $c=1$. Finalmente, como a ordenada de $(0,1)$ é subtraída de duas unidades, concluímos que $d=-2$ (translação vertical).

Desta forma, temos que:

$$a=2 \qquad b=0 \qquad c=1 \qquad d=-2$$

Portanto: $p_2(x)=p_1(2\,x)-2=((2\,x)^2-1)^2-2=(4\,x^2-1)^2-2.$

4. (a) Como u é dada por uma função exponencial $x\mapsto 2^x$ aplicada sobre a função seno e esta função exponencial é estritamente crescente, segue que o valor de u será máximo quando o valor de $\operatorname{sen} x$ for máximo e será mínimo quando o valor de $\operatorname{sen} x$ for mínimo.

$$x=\frac{\pi}{2}+2\,k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x)=1\Leftrightarrow u(x)=2$$
$$x=\frac{3\,\pi}{2}+2\,k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x)=-1\Leftrightarrow u(x)=\frac{1}{2}$$

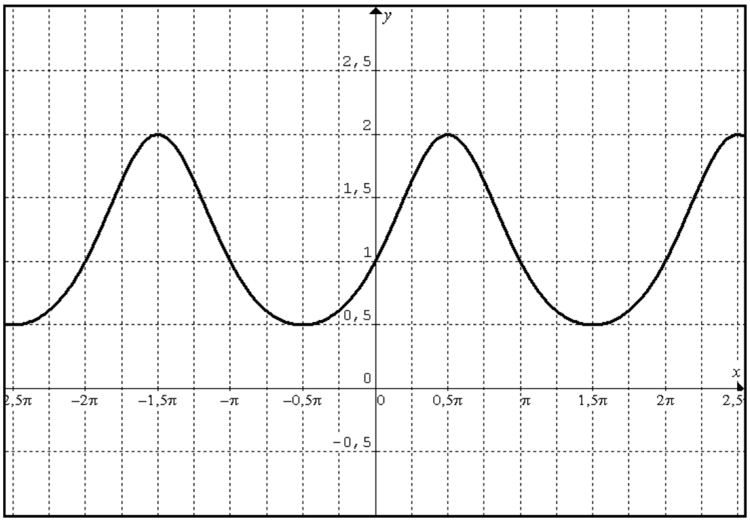
Portanto, o maior e o menor valores atingidos por u são 2 e $\frac{1}{2}$.

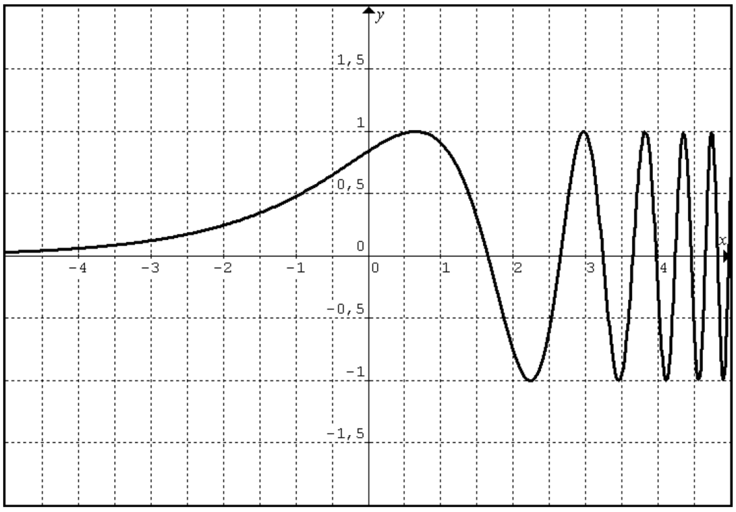
Como v é dada pela função seno aplicada sobre outra função real, temos necessariamente que $-1 \leqslant v(x) \leqslant 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, temos que:

$$
\begin{aligned}
v(x) = 1 &\Leftrightarrow 2^x = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right),\ k \in \mathbb{N}\\
v(x) = -1 &\Leftrightarrow 2^x = \frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right),\ k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

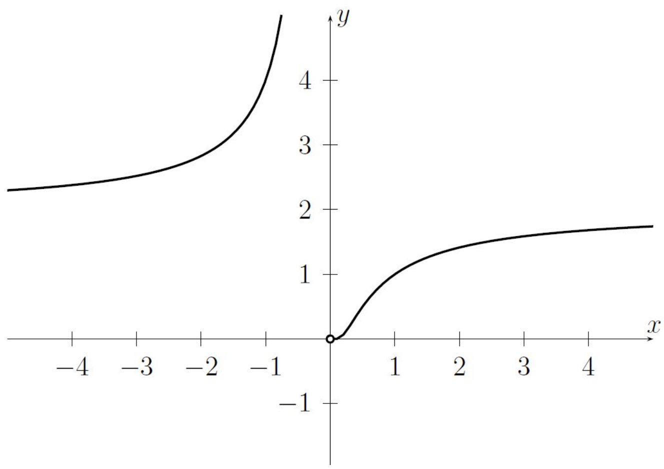
Portanto, o maior e o menor valores atingidos por v são 1 e -1.

(b) Com base no item anterior, concluímos que os gráficos de u e de v têm os seguintes aspectos:





5. (a) Quando x cresce muito em valor absoluto (isto é, quando x tende a $\pm\infty$), o expoente $1 - \frac{1}{x}$ se aproxima de 1, portanto $g(x)$ se aproxima de 2. Quando x se aproxima de 0 com valores positivos, o expoente $1 - \frac{1}{x}$ tende de $-\infty$, logo $g(x)$ se aproxima de 0. Quando x se aproxima de 0 com valores negativos, o expoente $1 - \frac{1}{x}$ tende de $+\infty$, logo $g(x)$ também tende de $+\infty$. Logo, o gráfico de g tem o seguinte aspecto:



(b) Para que tivéssemos $g(x) = 2$, deveríamos ter $1 - \frac{1}{x} = 1$. Portanto, a equação $g(x) = 2$ não possui soluções reais.

Resolvendo a equação $g(x) = 4$, temos

$$g(x) = 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

Portanto, a única solução real da equação $g(x) = 2$ é $x = -1$.

(c) Em primeiro lugar, observamos que, como a função exponencial é estritamente crescente, então:

$$g(x) < 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} < 2$$

Então:

$$g(x) < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > -1$$

Para continuar a resolução da inequação, devemos considerar separadamente os casos em $x > 0$ e $x < 0$:

- Se $x > 0$, então $\frac{1}{x} > -1 \Leftrightarrow x > -1$.

- Se $x < 0$, então $\frac{1}{x} > -1 \Leftrightarrow x < -1$.

Portanto a solução da inequação é dada pelo conjunto $]-\infty, -1[\, \cup \,]0, +\infty[$.

Observe que esta solução pode ser visualizada no gráfico de g, pelos pontos do domínio cujas imagens ficam abaixo da reta $y = 4$.