MA11 – Números e Funções Reais
Avaliação 2 GABARITO
22 de junho de 2013

1. Em cada um dos itens abaixo, dê, se possível, um exemplo de um polinômio $p(x)$ satisfazendo todas as condições dadas.

Caso o exemplo não seja possível, justifique a sua resposta.

Lembre-se que se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ então

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1}$$

(a) $p(1) = p(-1) = 0$, $p'(0) = 1$ e $p(x)$ é de grau 2.
(b) $p(1) = p(-1) = 0$ e $p'(0) = 1$.
(c) $p(1) = p(-1) = 0$, $p'(0) = 0$ e $p(x)$ é de grau 2.
(d) $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = p(2) = 1$ e $p(x)$ é de grau 2.
(e) $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = p(2) = 1$ e $p(x)$ é de grau 3.

Uma solução:

[pontuação total: 2,0]

(a) (0,4 ponto) Como $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ são raízes de p e p é um polinômio de grau 2, então, pela simetria do gráfico das funções quadráticas, em seu ponto médio, $x_0 = 0$, deve ocorre um extremo de p. Logo, deve-se ter $p'(0) = 0$.

Uma outra solução é a seguinte: como $p(x) = a(x-1)(x+1) = ax^2 - a$, para algum $a \neq 0$, já que $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ são raízes, então $p'(x) = 2ax$ e $p'(0) = 0$.

Portanto, o exemplo não é possível.

(b) (0,4 ponto) Consideremos, por exemplo, o polinômio de grau 3, $p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$. Então, $p'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$. Logo, para satisfazer as condições dadas, deve-se ter:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Isto é: $a=-1$, $b=-d$ e $c=1$. Portanto, pode-se tomar como exemplo: $p(x) = -x^3 + x$.

(c) (0,4 ponto) Pelo mesmo argumento do item (a), a condição $p'(0)=0$ é corolário da condição $p(1)=p(-1)=0$. Logo, basta garantir que $p(1)=p(-1)=0$.

Portanto, pode-se tomar como exemplo: $p(x)=x^2-1$.

(d) (0,4 ponto) Consideremos o polinômio de grau 2, $p(x)=a\,x^2+b\,x+c$. Para satisfazer as condições dadas, deve-se ter:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \\ c=1 \\ 4\,a+2\,b+c=1 \end{cases}$$

Entretanto, substituindo $c=1$ nas duas primeiras equações conclui-se que $a=-1$ e $b=0$, o que contradiz a última equação. Logo, o sistema não tem soluções.

Portanto, o exemplo não é possível.

(e) (0,4 ponto) Consideremos, por exemplo, o polinômio de grau 3, $p(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$. Para satisfazer as condições dadas, deve-se ter:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -a+b-c+d=0 \\ d=1 \\ 8\,a+4\,b+2\,c+d=1 \end{cases}$$

Substituindo $d=1$ nas duas primeiras equações conclui-se que $b=-1$ e $a+c=0$.
Da última equação, segue que $a=\frac{2}{3}$ e $c=-\frac{2}{3}$.
Portanto, o (único) exemplo possível é: $p(x)=\frac{2}{3}\,x^3-x^2-\frac{2}{3}\,x+1$.

2. Um número real x_0 é *raiz de multiplicidade* k do polinômio $p(x)$ se $p(x)=(x-x_0)^k q(x)$, para algum polinômio $q(x)$, com $q(x_0)\neq 0$.

Sugestão para resolver os ítens abaixo: Use o fato de que toda função polinomial é uma função contínua e que "Se f é uma função real contínua e $f(x_0)\neq 0$, então existe uma vizinhança de x_0 em que f não se anula".

(a) Mostre que x_0 é raiz de multiplicidade par de $p(x)$ se, e somente se, existe $r>0$ tal que $p(x)$ não muda de sinal para x pertencente ao conjunto $]x_0-r, x_0+r[\setminus\{x_0\} = \{x\in\mathbb{R} : x_0-r<x<x_0+r,\ x\neq x_0\}$.

(b) Mostre que x_0 é raiz de multiplicidade ímpar de $p(x)$ se, e somente se, existe $r > 0$ tal que o sinal de $p(x)$ para $x \in]x_0 - r, x_0[$ é oposto ao sinal de $p(x)$ para $x \in]x_0, x_0 + r[$.

(c) Interprete geometricamente os resultados dos dois ítens anteriores.

Uma solução:

[pontuação total: 2,0]

Nesta questão, embora não explicitamente afirmado, deve-se supor, como uma hipótese global, que x_0 é uma raiz de $p(x)$, embora a parte b) possa ser provada sem que isto seja assumido.

Tem-se que $q(x_0) \neq 0$, digamos $q(x_0) > 0$. Então, existe $r > 0$ tal que $q(x) > 0 \; \forall \, x \in I$, em que I é o intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$. Como $p(x) = (x - x_0)^k \, q(x)$, então $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ possuem o mesmo sinal em $I \setminus \{x_0\}$ (se $q(x_0) < 0$, $p(x)$ e $(x - x_0)^k$ terão sinais opostos em $I \setminus \{x_0\}$, e as conclusões dos itens a seguir valerão com os sinais contrários).

(a) (0,8 ponto) Tem-se que k é par se, e somente se, $(x - x_0)^k > 0$, $\forall \, x \in I \setminus \{x_0\}$. Logo, k é par se, e somente se, $p(x) > 0$, $\forall \, x \in I \setminus \{x_0\}$.

(b) (0,8 ponto) Tem-se que k é ímpar se, e somente se, $(x - x_0)^k < 0$, $\forall \, x \in]x_0 - r, x_0[$ e $(x - x_0)^k > 0$, $\forall \, x \in]x_0, x_0 + r[$. Logo, k é ímpar se, e somente se, $p(x) < 0$, $\forall \, x \in]x_0 - r, x_0[$ e $p(x) > 0$, $\forall \, x \in]x_0, x_0 + r[$.

(c) (0,4 ponto) Geometricamente, tem-se que:

   i. se a multiplicidade de x_0 é par, então o gráfico de p "toca" o eixo em x_0, no sentido em que, próximo ao ponto $(x_0, 0)$, fica no mesmo semi-plano determinado pelo eixo horizontal;

   ii. se a multiplicidade de x_0 é ímpar, então o gráfico de p "cruza" o eixo em x_0, no sentido em que, próximo ao ponto $(x_0, 0)$, fica em semi-planos opostos determinados pelo eixo horizontal.

3. A massa de certas substâncias radioativas decresce a uma taxa proporcional à própria massa. A *meia-vida* T de uma substância como essa é definida como o tempo transcorrido para que sua massa se reduza à metade da inicial. Considere uma substância radioativa $\mathcal{S}$ que cuja meia-vida é de 5.000 anos.

(a) Considere uma massa de $m_0 = 7\,g$ da substância $\mathcal{S}$. Qual é o tempo transcorrido para a massa se reduza a $\frac{1}{8}$ da inicial? Este tempo depende da massa inicial m_0? Justifique sua resposta.

(b) Determine a função $m : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ que dá a massa da substância $\mathcal{S}$, com massa inicial m_0, em função do tempo medido em anos.

(c) Use as aproximações $\log_{10}(2) \cong 0,3$ e $\log_{10}(5) \cong 0,7$ para determinar uma aproximação para o tempo gasto para a massa da substância $\mathcal{S}$ se reduzir a 10% da inicial.

Uma solução:

[pontuação total: 2,0]

(a) (0,2 ponto) Após os primeiros 5.000 anos, a massa será igual $m_1 = \frac{1}{2}\,m_0$. Após mais 5.000 a massa será $m_2 = \frac{1}{2}\,m_1 = \frac{1}{4}\,m_0$; e após outros 5.000, esta será $m_3 = \frac{1}{2}\,m_2 = \frac{1}{8}\,m_0$. Portanto, são decorridos 15.000 para que a massa se reduza a $\frac{1}{8}$ da inicial.

Independentemente de $m_0 = 7$g ou outro valor, o tempo para que a massa seja reduzida a $\frac{1}{8}$ da inicial será sempre de 15.000 anos.

Como este argumento mostra, devido à definição de meia-vida, a resposta não depende do valor da massa inicial.

(b) (0,8 ponto) Consideremos uma variável s representando o tempo medido em unidades de 5.000 anos. Como a cada 5.000 anos, a massa cai a metade, então a massa em função de s é dada por:

$$m(s) = \frac{1}{2^s}\,m_0\,.$$

Se t é uma variável representando o tempo medido em anos, então $t = 5.000\,s$. Portanto:

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/5.000}}\,m_0\,.$$

(c) (1,0 ponto) Devemos resolver a equação $m(t) = \frac{1}{10}\,m_0$, que corresponde a $2^{t/5.000} = 10$. Portanto, temos:

$$\frac{t}{5.000} = \log_2 10 = 1 + \log_2 5 = 1 + \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$$

Logo:

$$t = 5.000\left(1 + \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}\right) \simeq 5.000\left(1 + \frac{7}{3}\right) = \frac{50.000}{3} \simeq 16.667\,\text{anos}.$$

4. Considere uma reta r, um ponto $A \notin r$ e três pontos $B, C, D \in r$, tais que C está entre B e D. Em cada um dos itens a seguir, decida se os dados são suficientes para determinar com certeza as medidas de:

(i) cada um dos lados do triângulo ABC;

(ii) cada um dos ângulos do triângulo ABC.

Justifique rigorosamente as suas respostas.

(a) $\overline{BC} = 1$ e $\widehat{BAC} = 60°$;
(b) $\overline{BC} = 1$ e $\widehat{ACD} = 135°$;
(c) $\overline{BC} = 1$, $\widehat{BAC} = 60°$ e $\widehat{ACD} = 135°$;
(d) $\widehat{BAC} = 60°$ e $\widehat{ACD} = 135°$.

Uma solução:

[pontuação total: 2,0]

Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.

(a) (0,5 ponto) Pela Lei dos Cossenos, temos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\widehat{BAC})$. Isto é:

$$b^2 + c^2 - \,b\,c = 1\,.$$

Quaisquer soluções da equação acima satisfazem às condições dadas. Podemos tomar, por exemplo, os triângulos $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, como lados dados respectivamente por:

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1 \qquad a_2 = 1,\, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},\, c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Além de terem lados diferentes, estes triângulos possuem, claramente, ângulos diferentes (isto é, não são semelhantes), uma vez que o primeiro é equilátero e o segundo não.

Portanto, não é possível determinar com certeza as medidas dos lados ou dos ângulos do triângulo. De fato, o lugar geométrico dos pontos A que satisfazem as condições dadas formam um arco de círculo (chamado *arco capaz*). Portanto, há infinitos triângulos satisfazendo essas condições.

(b) (0,5 ponto) Pela Lei dos Cossenos, temos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\widehat{BCA})$. Isto é:

$$c^2 = 1 + b^2 - \sqrt{2}\,b\,.$$

Como no item anterior, quaisquer soluções da equação acima satisfazem às condições dadas. Podemos tomar, por exemplo, os triângulos $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, como lados dados respectivamente por:

$$a_1 = c_1 = 1\,, b_1 = \sqrt{2} \qquad a_2 = 1,\; b_2 = 2\sqrt{2},\; c_2 = \sqrt{5}$$

De forma análoga ao item anterior, estes triângulos possuem, claramente, ângulos diferentes (isto é, não são semelhantes), uma vez que o primeiro é isósceles e o segundo não.

Portanto, não é possível determinar com certeza as medidas dos lados ou dos ângulos do triângulo. De fato, o lugar geométrico dos pontos A que satisfazem as condições dadas é a semi-reta $\vec{CA}$. Portanto, há infinitos triângulos satisfazendo essas condições.

(c) (0,5 ponto) Neste caso, os ângulos do triângulo estão determinados, pois temos:

$$\widehat{BAC} = 60^\circ \qquad \widehat{BCA} = 45^\circ \qquad \widehat{ABC} = 75^\circ$$

Pela Lei dos Senos, temos: $\dfrac{\operatorname{sen}(\widehat{BAC})}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}(\widehat{ABC})}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}(\widehat{BCA})}{c}$.

Temos que $\operatorname{sen}(75^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ)\cos(30^\circ) + \cos(45^\circ)\operatorname{sen}(30^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

Isto permite determinar também as medidas dos lados dos triângulo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4\,b} = \frac{\sqrt{2}}{2\,c}$$

Portanto:

$$b = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}{6}$$
$$c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

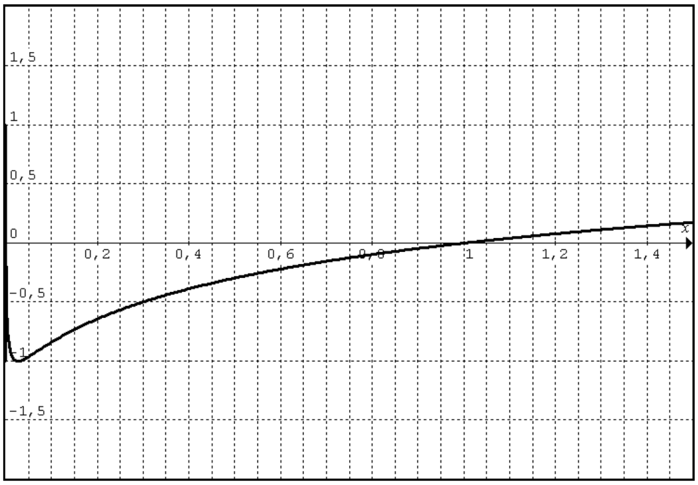
Como as condições dadas nesse item são a união das condições dos itens (a) e (b), o ponto A que satisfaz essas condições está na interseção dos lugares geométricos mencionados nos itens (a) e (b) (arco de círculo e semi-reta). Portanto, há um único triângulo satisfazendo às condições dadas.

(d) (0,5 ponto) Neste caso, os ângulos do triângulo estão determinados, pois temos:

$$\widehat{BAC} = 60^\circ \qquad \widehat{BCA} = 45^\circ \qquad \widehat{ABC} = 75^\circ$$

Porém como não há nenhuma informação sobre as medidas dos lados, não é possível determiná-las. De fato, há uma família de triângulos semelhantes que satisfazem as condições dadas.

5. A figura a seguir representa um esboço do gráfico da função $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \operatorname{sen}(\log_{10}(x))$, feito por um aplicativo computacional. Observe que o aplicativo não conseguiu desenhar em detalhes o que ocorre perto da origem do sistema de coordenadas.



(a) Determine todas as raízes da equação $g(x) = 0$. É possível determinar a menor raiz?

(b) Faça um esboço do gráfico de g na janela gráfica $0 < x < 0,1$ e $-2 < y < 2$.

(c) Considere um sistema de coordenadas $x'y$ em que o eixo horizontal x' está em escala logarítmica decimal (isto é, se x representa um eixo em coordenadas cartesianas convencionais, então $x' = \log_{10} x$) e o eixo vertical y está em coordenadas cartesianas convencionais. Faça um esboço do gráfico de g neste sistema, para $10^{-4} < x < 10^{4}$ e $-2 < y < 2$.

Uma solução:

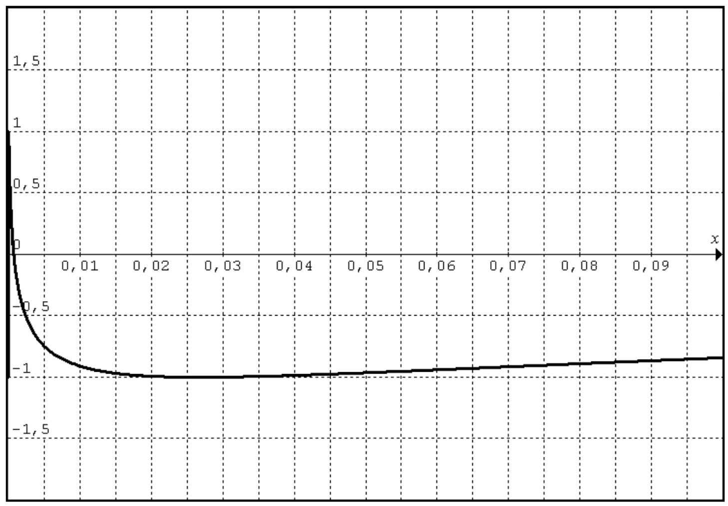
[pontuação total: 2,0]

(a) (0,6 ponto) Temos que:

$$\operatorname{sen}(\log_{10} x) = 0 \Leftrightarrow \log_{10} x = k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 10^{k\,\pi}\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Então, tomando valores negativos de k, obtemos raízes tão próximas de 0 quanto se queira. Portanto, não existe uma raiz mínima para a equação.

(b) (0,7 ponto) Nesta janela, o gráfico terá o seguinte aspecto:



(c) (0,7 ponto) No sistema de variáveis $x'y$, a equação de g adquire a forma $g(x') = \operatorname{sen}(x)$. Portanto, neste sistema de eixos o gráfico terá o aspecto de uma curva senóide. Neste intervalo da variável x, encontram-se as raízes: $x_1 = 10^{-\pi} \simeq 0,001$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 10^{\pi} \simeq 1000$.