Questão 1.

Calcule as seguintes expressões:

(1,0) (a) $\log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right]$

(1,0) (b) $x^{\log a/\log x}$, onde $a > 0$, $x > 0$ e a base dos logaritmos é fixada arbitrariamente.

UMA SOLUÇÃO

(a) Como $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = n^{1/n^3}$, temos

$$\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{n^3} = n^{-3}\,,$$

logo o valor da expressão dada é -3.

(b) Tomando logaritmo na base b que foi fixada, temos

$$\log\left(x^{\log a/\log x}\right) = \frac{\log a}{\log x} \cdot \log x = \log a\,.$$

Como a função log é injetiva, segue-se que

$$x^{\log a/\log x} = a\,.$$

Questão 2.

(Como caracterizar a função exponencial a partir da função logaritmo.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente, tal que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes afirmações:

(1,0) (a) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(1) > 1$.

(1,0) (b) Pondo $a = f(1)$ a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a f(x)$ é linear. (Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.)

(0,5) (c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$, onde g é a função definida no item (b).

(0,5) (d) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

UMA SOLUÇÃO

O objetivo desta questão é mostrar que é possível caracterizar a função exponencial a partir da função logaritmo, sem usar argumentos geométricos, como está no livro no caso de logaritmos naturais.

(a) Sendo crescente, f não é identicamente nula. Daí resulta que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois se existisse $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f(x_0) = 0$ teríamos, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0$$

e f seria identicamente nula.

Em seguida, notamos que

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) = [f(\frac{x}{2})]^2 > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $f(0) = 1$. Como $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$, então $f(0)$ é solução positiva da equação $x = x^2$. Como essa equação só tem 1 como solução positiva, a igualdade está demonstrada.

Finalmente, como f é crescente, $f(1) > f(0) = 1$.

(b) O Teorema Fundamental da Proporcionalidade diz que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente e satisfaz $g(x + y) = g(x) + g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, então g é linear, isto é, $g(x) = cx$, com $c > 0$. No nosso caso, temos

$$g(x + y) = \log_a f(x + y) = \log_a[f(x) \cdot f(y)] = \log_a f(x) + \log_a f(y) = g(x) + g(y)\,,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) Temos $g(1) = \log_a f(1) = \log_a a = 1$, portanto $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Como acabamos de ver, $\log_a f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\log_a a^x = x$ e a função $\log_a$ é injetiva, segue-se que $f(x) = a^x$.

Questão 3.

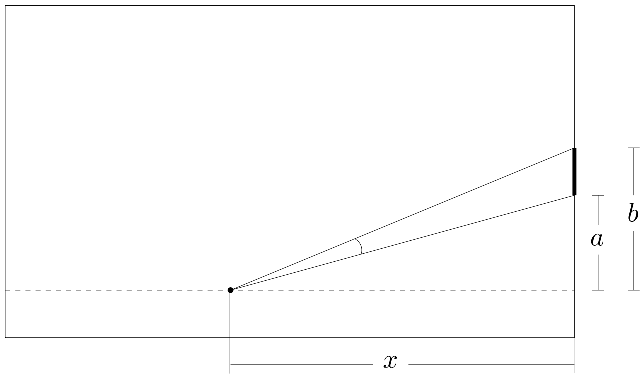
(1,0) (a) Usando as fórmulas para $\cos(x+y)$ e $\operatorname{sen}(x+y)$, prove que

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(y)}{1 + \operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{tg}(y)}$$

(desde que $\operatorname{tg}(x-y)$, $\operatorname{tg}(x)$ e $\operatorname{tg}(y)$ estejam definidas).

(1,5) (b) Levando em conta que um ângulo é máximo num certo intervalo quando sua tangente é máxima, use a fórmula acima para resolver o seguinte problema:

Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura). Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{ab}$.



UMA SOLUÇÃO

(a) A manipulação é direta:

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) - \operatorname{sen}(y) \cdot \cos(x)}{\cos(x) \cdot \cos(y) + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos(x) \cdot \cos(y)$ (se $\operatorname{tg}(x)$ e tg(y) estão definidas, $\cos(x)$ e $\cos(y)$ são não nulos), vem

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}} = \frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(y)}{1 + \operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{tg}(y)}.$$

(b) Em cada instante, o jogador vê a meta sob o ângulo $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, onde α_1 e α_2 são os ângulos entre sua trajetória e as retas que o ligam aos postes da meta. Temos

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2) - \operatorname{tg}(\alpha_1)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha 1) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_2)}.$$

Se x é a distância do jogador ao fundo do campo, temos $\mathrm{tg}(\alpha_1) = \frac{a}{x}$ e $\mathrm{tg}(\alpha_2) = \frac{b}{x}$, logo

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}} .$$

Como o numerador $b - a$ é constante, $\mathrm{tg}(\alpha)$ é máxima quando o denominador for mínimo. Ou seja, é preciso achar x que minimiza a expressão $x + \frac{ab}{x}$.

Como a média aritmética é sempre maior do que ou igual à média geométrica, então $\frac{1}{2}(x + \frac{ab}{x}) \geq \sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} = \sqrt{ab}$, ou seja, o denominador é sempre maior do que ou igual a a $2\sqrt{ab}$. A igualdade vale se e somente se os dois termos da média são iguais, isto é, quando $x = \sqrt{ab}$. Portanto $x + \frac{ab}{x}$ atinge seu menor valor quando $x = \sqrt{ab}$.

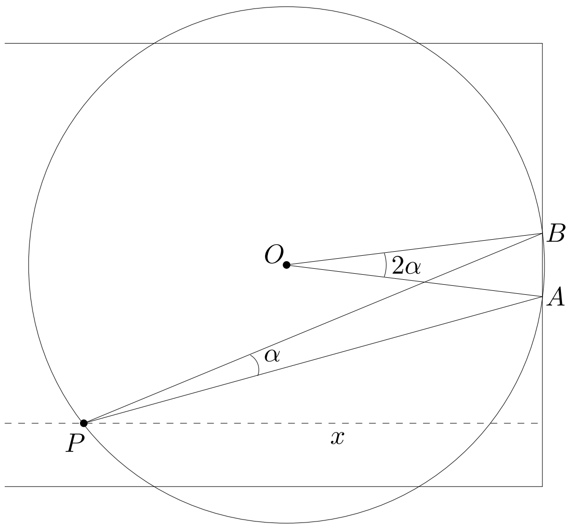
Obs. É possível resolver a questão (b) com outros argumentos. Sejam A e B os extremos da meta, que distam a e b da linha do jogador, respectivamente (veja figura abaixo, à esquerda). Para cada posição P do jogador, existe um único círculo que passa por A, B e P. O centro desse círculo, O, está na mediatriz dos pontos A e B (pois AOB é triângulo isósceles), estando, portanto, a $\frac{b+a}{2}$ de distância da linha do jogador. Os segmentos OA e OB têm comprimento igual ao raio do círculo, digamos r, cujo valor depende de P.

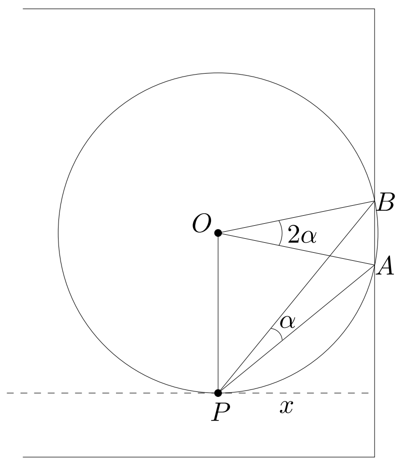
Pelo Teorema do Ângulo Inscrito, $A\hat{O}B = 2A\hat{P}B$. Assim, $A\hat{P}B$ é máximo quando $A\hat{O}B$ é máximo. E $A\hat{O}B$ é máximo quando a distância $OA = OB = r$ é mínima. Mas o menor r possível é aquele tal que o círculo de centro sobre a mediatriz de A e B e raio r tangencia a linha do jogador. Nessa situação, OP é perpendicular à linha do jogador e $r = \frac{b+a}{2}$ (ver figura abaixo, à direita).

O valor de x, neste caso, é a altura do triângulo AOB com relação à base AB (ou seja, o comprimento da apótema da corda AB). Esse valor sai do Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo AOQ, em que Q é o ponto médio de AB. Ou seja,

$$x^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = r^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 .$$

Dessa equação resulta a solução $x = \sqrt{ab}$.





Questão 4.

(1,0) (a) 24h após sua administração, a quantidade de uma droga no sangue reduz-se a 10% da inicial. Que percentagem resta 12h após a administração? Justifique sua resposta, admitindo que o decaimento da quantidade de droga no sangue é exponencial.

(1,0) (b) Em quanto tempo a quantidade de droga no organismo se reduz a 50% da dose inicial?

(0,5) (c) Se a mesma droga for administrada em duas doses de 10 mg com um intervalo de 12h, qual é a quantidade presente no organismo após 24h da primeira dose?

UMA SOLUÇÃO

(a) Sendo exponencial, a quantidade de droga no organismo obedece à lei c_0a^t, onde a é um número entre 0 e 1, c_0 é a dose inicial (obtida da expressão para $t = 0$) e t é medido, por exemplo, em horas. Após 24h a quantidade se reduz a $\frac{1}{10}$ da inicial, isto é,

$$c_0a^{24} = \frac{c_0}{10}\,.$$

Portanto $a^{24} = \frac{1}{10}$. Daí segue que $a^{12} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, e que

$$c_0a^{12} = \frac{c_0}{\sqrt{10}}\,.$$

Então a quantidade de droga após 12h é a quantidade inicial dividida por $\sqrt{10}$.

(b) Para saber o tempo necessário para a redução da quantidade de droga à metade (isto é, a meia-vida da droga no organismo), basta achar t que cumpra $a^t = \frac{1}{2}$. Como $a^{24} = \frac{1}{10}$ implica

$$a^{24s} = \left(\frac{1}{10}\right)^s$$

a resposta é $t = 24s$, onde s é tal que $10^{-s} = 2^{-1}$. Daí segue que $s = \log_{10} 2$ e que $t = 24 \log_{10} 2$.

(c) A quantidade logo após a primeira dose é c_0. Após 12h ela decai para $\frac{c_0}{\sqrt{10}}$. Uma nova administração a eleva para $c_0 + \frac{c_0}{10} = c_0(1 + \frac{1}{\sqrt{10}})$. Após mais 12h essa quantidade é dividida por $\sqrt{10}$, passando a ser

$$c_0\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10}\right)\,,$$

logo, com $c_0 = 10$ mg, restarão, após 24h da primeira dose,

$$(1 + \sqrt{10})\text{ mg.}$$