

Questão 01 [2,0 pts]

Faça um esboço do conjunto dos pontos do plano tais que

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2 = 4; \quad x, y \in \mathbb{R},$$

onde $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ representa o maior inteiro menor do que x ou igual a x .

Solução

Note que o número $\lfloor x \rfloor$ é sempre um número inteiro, e então $\lfloor x \rfloor^2$ é um inteiro não-negativo quadrado perfeito. Logo, as únicas possíveis soluções inteiras para a equação são $\lfloor x \rfloor^2 = 0$, o que implica necessariamente $\lfloor y \rfloor^2 = 4$, ou $\lfloor x \rfloor^2 = 4$ o que implica $\lfloor y \rfloor^2 = 0$.

Temos

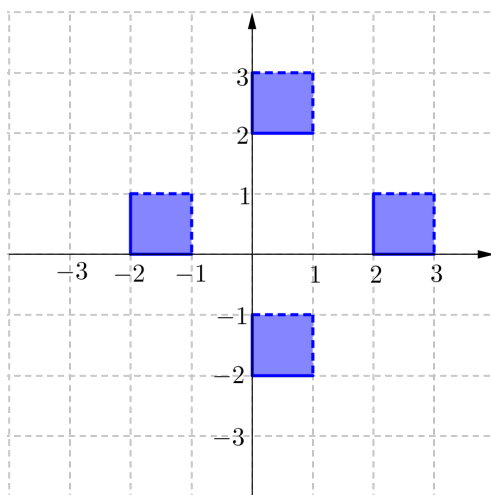
$$\lfloor x \rfloor^2 = 0 \iff \lfloor x \rfloor = 0 \iff x \in [0, 1)$$

$$\lfloor x \rfloor^2 = 4 \iff \lfloor x \rfloor = \pm 2 \iff x \in [-2, -1) \cup [2, 3)$$

e analogamente para y . Desta forma, os pares ordenados (x, y) que satisfazem à equação são os que pertencem ao conjunto

$$\left([0, 1) \times ([-2, -1) \cup [2, 3))\right) \cup \left(\left([-2, -1) \cup [2, 3)\right) \times [0, 1)\right),$$

cujo esboço é



onde, na figura, os segmentos tracejados representam os pontos da fronteira que não pertencem ao conjunto e as linhas contínuas, bem como as regiões internas pintadas, representam os pontos do conjunto.

Questão 02 [2,0 pts]

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Prove que, se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h , mas não de x , então f é uma função afim.

Solução

Teorema 5.11, página 102 do livro texto.

Questão 03 [2,0 pts]

Os termos $a_1, a_2, \dots, a_n$ de uma progressão aritmética positiva e crescente são os valores $f(1), f(2), \dots, f(n)$ de uma função afim.

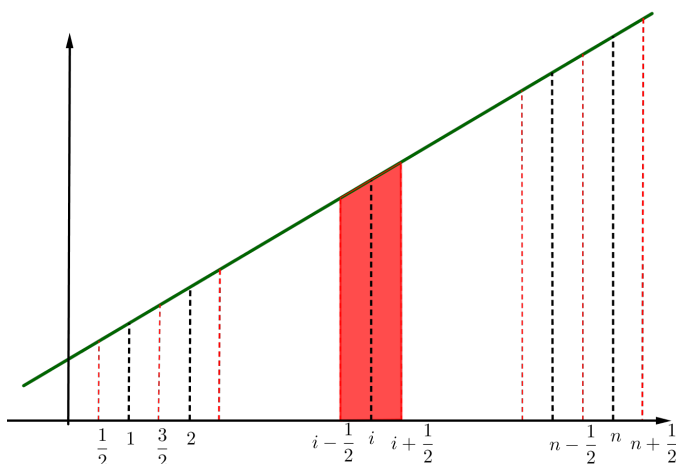
- (a) Mostre que cada a_i é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f , pelo eixo OX e pelas retas verticais de equações

$$x = i - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = i + \frac{1}{2}.$$

- (b) Mostre que a soma $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de f , pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = \frac{1}{2}$ e $x = n + \frac{1}{2}$.

- (c) Conclua que $S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Solução



- (a) A área do trapézio da figura é

$$A = \frac{[f(i + \frac{1}{2}) + f(i - \frac{1}{2})]}{2}.$$

Visto que $a_i = f(i)$, onde $f(x) = mx + b$ é uma função afim, temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{[f(i + \frac{1}{2}) + f(i - \frac{1}{2})]}{2} = \frac{2mi + 2b}{2} \\ &= mi + b = f(i) = a_i. \end{aligned}$$

- (b) Visto que o intervalo $[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ pode ser particionado como

$$\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] = \bigcup_{i=1}^n \left[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}\right],$$

o trapézio em questão pode ser particionado em n trapézios como os do item (a). Dessa forma a área do trapézio é

$$A_T = \sum_{i=1}^n \frac{[f(i + \frac{1}{2}) + f(i - \frac{1}{2})]}{2} = \sum_{i=1}^n a_i = S.$$

(c) A área do trapézio do item anterior é

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{[f(\frac{1}{2}) + f(n + \frac{1}{2})] [(n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}]}{2} = \frac{(m \cdot \frac{1}{2} + b + m(n + \frac{1}{2}) + b) n}{2} \\ &= \frac{((m + b) + (mn + b))n}{2} = \frac{f(1) + f(n)}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \end{aligned}$$

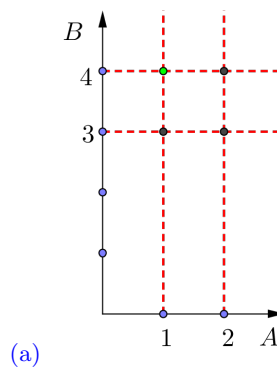
Como, pelo item (b), temos $S = A_T$, concluímos o resultado desejado.

Questão 04 [2,0 pts]

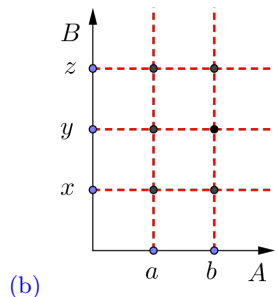
Dados dois conjuntos A e B , definimos o produto cartesiano de A por B , que denotamos por $A \times B$, como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, isto é, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

- (a) Determine, justificando, se o conjunto $X = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$ é um produto cartesiano de dois conjuntos.
- (b) Suponha que A e B tenham exatamente 2 e 3 elementos, respectivamente. Quantos subconjuntos não vazios de $A \times B$ são também produtos cartesianos?

Solução



O conjunto X não é um produto cartesiano, pois caso pudéssemos escrever $X = A \times B$, deveríamos ter $\{1, 2\} \subset A$ e $\{3, 4\} \subset B$ e isto obrigaria termos $(1, 4) \in A \times B = X$, o que não ocorre.



Sejam $A = \{a, b\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Os subconjuntos não vazios de A são $\{a\}$, $\{b\}$, e $\{a, b\}$ e os subconjuntos não vazios de B são $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, e $\{x, y, z\}$. Os subconjuntos de $A \times B$ que são produtos cartesianos são os produtos cartesianos dos subconjuntos não vazios de A pelos subconjuntos não vazios de B , o que nos dá $3 \times 7 = 21$ subconjuntos.

Questão 05 [2,0 pts]

Sejam E e F conjuntos com pelo menos 2 elementos e $f : E \rightarrow F$ uma função.

- (a) Prove que, se f é bijetiva então $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$, $\forall A \subset E$.
- (b) Reciprocamente, prove que se $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$, $\forall A \subset E$, $A \neq \emptyset$ e $A \neq E$, então $f : E \rightarrow F$ é bijetiva.

Solução

- (a) Inicialmente observe que, se f é bijetiva, a identidade vale trivialmente para $A = \emptyset$ e $A = E$, desta forma, vamos nos ater à demonstração para subconjuntos não vazios com complementares não vazios.

Vamos provar primeiro que $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$, $\forall A \subset E$. Dado $y \in f(E \setminus A)$, existe $x \in E \setminus A$ tal que $f(x) = y$. Suponhamos por absurdo que $y \in f(A)$. Nesse caso existe $x_1 \in A$ tal que $f(x_1) = y$, isto é, $f(x) = y = f(x_1)$. Como f é injetiva, segue que $x_1 = x$, o que é um absurdo, pois $x \in E \setminus A$. Logo $y \in F \setminus f(A)$ e, portanto, $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$.

Reciprocamente, vamos mostrar que $F \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$. Seja $y \in F \setminus f(A)$. Como f é sobrejetiva, existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$. Suponhamos, por absurdo que $x \in A$. Nesse caso, $y = f(x) \in f(A)$, o que é um absurdo. Logo $x \in E \setminus A$ e $y = f(x) \in f(E \setminus A)$.

- (b) Primeiro vamos mostrar que f é injetiva. Sejam $x_1 \in E$ e $x_2 \in E$ tais que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Vamos mostrar que $x_1 = x_2$. Considere $A = \{x_1\}$. Se $x_1 \neq x_2$, então $x_2 \in E \setminus A$. Isto implica que $y = f(x_2) \in f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$, o que é um absurdo, pois $y = f(x_1) \in f(A)$. Logo $x_1 = x_2$ e f é injetiva.

Agora vamos mostrar que f é sobrejetiva. Seja $x \in E$ e $A = E \setminus \{x\}$. Como E tem pelo menos 2 elementos, $E \setminus \{x\}$ é não vazio. Temos $F \setminus f(A) = f(E \setminus A) = f(\{x\})$. Isto implica que

$$F = (F \setminus f(A)) \cup f(A) = f(\{x\}) \cup f(E \setminus \{x\}) = f(\{x\} \cup (E \setminus \{x\})) = f(E),$$

e portanto f é sobrejetiva.