Questão 1 [2,0 pt]

Sejam A, B, C conjuntos. Prove que

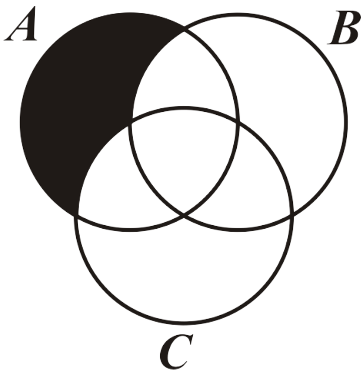
(a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

(b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

As identidades acima são versões para três conjuntos das "leis de De Morgan", em homenagem ao matemático Augustus De Morgan (1806-1871), um dos pais da lógica matemática moderna.

Solução

(a) Inicialmente vamos mostrar que $A-(B\cup C) \subseteq (A-B)\cap(A-C)$. De fato, se $x \in A-(B\cup C)$, então $x \in A$ e $x \notin B\cup C$, isto é, $x \in A$, $x \notin B$ e $x \notin C$. Como $x \in A$ e $x \notin B$ vemos que $x \in A - B$. Analogamente, como $x \in A$ e $x \notin C$, vemos que $x \in A - C$. Logo $x \in (A - B) \cap (A - C)$.



Reciprocamente, vamos mostrar que $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C)$. Se $x \in (A - B) \cap (A - C)$, então $x \in A - B$ e $x \in A - C$, isto é, $x \in A$, $x \notin B$ e $x \notin C$. Desta forma, $x \in A$ e $x \notin B \cup C$, ou seja, $x \in A - (B \cup C)$.

Como $A-(B\cup C) \subseteq (A-B)\cap(A-C)$ e $(A-B)\cap(A-C) \subseteq A-(B\cup C)$, concluímos que $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$.

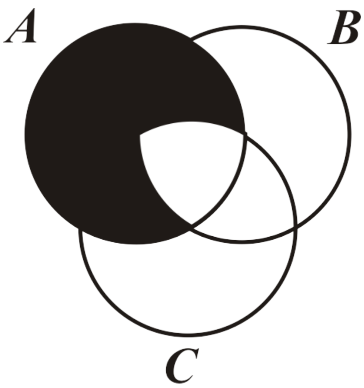
(b) Inicialmente, vamos provar que $A - (B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C)$. Se $x \in A - (B \cap C)$, então $x \in A$ e $x \notin B \cap C$. Temos então três possibilidades:

(i) $x \in A$, $x \in B$ e $x \notin C$;

(ii) $x \in A$, $x \notin B$ e $x \in C$;

(iii) $x \in A$, $x \notin B$ e $x \notin C$.

No caso (i) temos $x \in A - C$, no caso (ii) temos $x \in A - B$ e no caso (iii) temos $x \in A - B$ e $x \in A - C$. Assim $x \in (A-B)\cup(A-C)$. Observe que aqui temos o típico caso de "ou" lógico, que engloba o caso (iii), onde $x \in (A-C)\cap(A-B)$.



Reciprocamente, se $x \in (A-B) \cup (A-C)$, então $x \in A - C$ ou $x \in A - B$ (onde, como dito acima, "ou" engloba o caso $x \in (A-B) \cap (A-C)$). Temos os seguintes casos a considerar:

(i) $x \in A - B$ e $x \notin A - C$;

(ii) $x \in A - C$ e $x \notin A - B$;

(iii) $x \in A - B$ e $x \in A - C$.

No caso (i) temos $x \in A$, $x \notin B$ e $x \notin A - C$, o que implica $x \in A$, $x \notin B$ e $x \in C$, de onde segue que $x \in A$ e $x \notin B \cap C$, isto é, $x \in A - (B \cap C)$. O caso (ii) é inteiramente análogo. No caso (iii), temos $x \in A - B$ e $x \in A - C$, de onde $x \in A$, $x \notin B$ e $x \notin C$, o que implica $x \in A - (B \cap C)$. Logo $(A-B) \cup (A-C) \subseteq A - (B \cap C)$, e portanto, os dois conjuntos coincidem.

Questão 2 **[2,0 pt]**

Prove que $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma bijeção.

Solução

(i) A função f é injetiva. Vamos mostrar que, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Temos

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ &\Rightarrow \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = \frac{x_2^2}{1+x_2^2} \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_1^2x_2^2 = x_2^2 + x_1^2x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado no denominador da equação

$$\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}},$$

vemos que $x_1 = x_2$. Logo f é injetiva.

(ii) A função f é sobrejetiva.
Dado $y \in (-1,1)$, vamos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Resolvendo a equação $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y$, temos

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y &\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = y^2 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \\ &\Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \end{aligned}$$

pois a opção $x = \dfrac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ pode ser descartada substituindo-a na equação $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y$. Logo f é sobrejetiva e, portanto, é uma bijeção.

Questão 3 **[2,0 pt]**

Prove que $\log_{10} 2$ não é um número racional.

Solução

Suponhamos por absurdo que $\log_{10} 2$ seja um número racional. Isto implica que existem $p, q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, primos entre si, tais que

$$\log_{10} 2 = \frac{p}{q}.$$

Temos que

$$\log_{10} 2 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 10^{p/q} = 2 \Leftrightarrow 10^p = 2^q \Leftrightarrow 2^p.5^p = 2^q \Leftrightarrow 5^p = 2^{q-p},$$

o que claramente um absurdo, visto que $p, q \neq 0$.

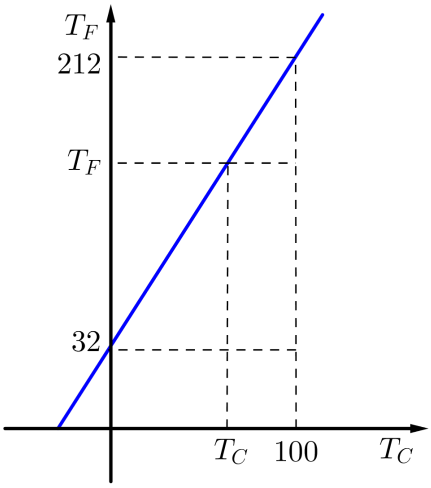
Observação: Podia-se notar também, a partir da identidade $10^p = 2^q$, que 5 divide 10^p mas não divide 2^q, o que nos levaria igualmente a uma contradição.

Questão 4 **[2,0 pt]**

Apesar do "grau Celsius" (°C) ser a medida mais usada para a temperatura, alguns países, como os Estados Unidos, usam outra medida de temperatura, o "grau Fahrenheit" (°F). Sabendo que os pontos de fusão e ebulição da água são 0°C e 100°C, respectivamente, e 32°F e 212°F, respectivamente, determine uma função afim que relaciona as temperaturas medidas em graus Celsius e graus Fahrenheit.

Solução

Denotemos por T_F a temperatura em graus Fahrenheit e por T_C a temperatura em graus Celsius.



Temos

$$\frac{T_F - 32}{T_C - 0} = \frac{212 - 32}{100 - 0} \Rightarrow \frac{T_F - 32}{T_C} = \frac{180}{100},$$

isto é,

$$T_F = 1,8T_C + 32, \text{ ou } T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32).$$

Questão 5 **[2,0 pt]**

Considere o conjunto dos números racionais diádicos $D = \left\{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$.

(a) Prove que se a e b são números reais tais que $a < b$, então existe $d \in D$ tal que $a < d < b$.

(b) A partir do item (a) conclua que em qualquer intervalo (a, b) existem infinitos números racionais diádicos.

Solução

(a) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{2^n} < b - a$. Logo $2^n b - 2^n a > 1$. Como $2^n b$ e $2^n a$ estão a uma distância maior que 1, segue que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $2^n a < m < 2^n b$. Portanto $a < \frac{m}{2^n} < b$.

(b) Seja n_0 um número natural tal que $0 < \dfrac{1}{2^{n_0}} < b - a$. Usando o item (a), existe um número diádico $\dfrac{m}{2^{n_0}} \in (a, b)$. Tomando $n > n_0$ temos $0 < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2^{n_0}} < b - a$ e desta forma, seguindo a construção do item (a), para cada $n > n_0$ existe um número diádico pertencente ao intervalo (a, b). Portanto, existem infinitos números diádicos no intervalo (a, b).