

Questão 1.

Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 3,5 litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

- (1.0) (a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?
- (1.0) (b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo 3,5 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

UMA RESPOSTA

Uma solução concisa é a seguinte:

- (a) O número de pessoas aumentou em $\frac{10}{7}$. Portanto a água disponível para cada um deve ser $\frac{7}{10}$ do que era antes (3,5 litros), isto é, $\frac{49}{20} = 2,45$ litros.
- (b) As 7 pessoas teriam água pelos 30 dias restantes, mas agora há $\frac{10}{7}$ vezes o número anterior de pessoas. Isso reduz os dias a $\frac{7}{10} \cdot 30 = 21$.

Outra forma de pensar é a seguinte. Primeiro calcula-se a quantidade Q de água que resta após 12 dias. Como restam 30 dias de viagem, com 7 pessoas consumindo 3,5 litros por dia, são $Q = 30 \times 7 \times 3,5$ litros (como a quantidade de água é justa para os 42 dias e os primeiros 12 dias transcorreram como previsto, conclui-se que o que resta para os outros 30 dias também é justo).

- (a) Esse total deve ser consumido nos mesmos 30 dias, mas agora por 10 pessoas. Então o consumo diário de cada um é Q dividido por 30×10 , que dá $\frac{7}{10} \times 3,5 = 2,45$ litros.
- (b) Se todos consumirem 3,5 litros por dia, a cada dia transcorrido após o décimo segundo dia serão consumidos 35 litros. Portanto, após n dias restarão $Q - 35n$ litros. Queremos saber o maior n tal que $Q - 35n \geq 0$, isto é, o maior n que seja menor ou igual a $\frac{Q}{35}$. Mas $\frac{Q}{35} = 30 \times \frac{7}{10} = 21$, então em 21 dias (exatamente) se esgotará o reservatório de água.

Questão 2.

(1.0) (a) Quais são os valores de y para os quais existe uma função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$?

(1.0) (b) Tome $y = 9$ e determine a função quadrática correspondente. Justifique seus argumentos.

UMA RESPOSTA

(a) Para que exista uma função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$ é necessário e suficiente que os pontos $(1, 3)$, $(2, 5)$ e $(3, y)$ não sejam colineares, isto é, que $\frac{5-3}{2-1} \neq \frac{y-5}{3-2}$, ou seja, que $y - 5 \neq 2$, ou ainda, $y \neq 7$.

(b) Para obter os coeficientes a, b, c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve-se resolver o sistema (nas incógnitas a, b, c)

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

Isto é feito de modo simples: basta subtrair a primeira equação das duas seguintes. Tem-se

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 8a + 2b = 6 \end{cases}$$

Por subtração (segunda menos duas vezes a primeira), ficamos com $2a = 2$, de onde sai imediatamente $a = 1$. Substituindo esse valor em $3a + b = 2$, obtemos $b = -1$, e voltando à equação $a + b + c = 3$ obtemos $c = 3$. Portanto $x^2 - x + 3$ é a função quadrática procurada.

Comentário: Há diversas outras formas de se resolver o problema. Por exemplo: tome primeiro a função $g(x) = 1 + 2x$, que é a função afim tal que $g(1) = 3$ e $g(2) = 5$. Observe que $f(x) = g(x) + a(x-1)(x-2)$ é uma função quadrática que assume os mesmos valores que g nos pontos $x = 1$ e $x = 2$. Então basta achar a que faça $f(3) = y$. Ora,

$$f(3) = 1 + 2 \cdot 3 + a(3-1)(3-2) = 7 + 2a.$$

Então $7 + 2a = y$ e, portanto, $a = \frac{y-7}{2}$. Por conseguinte,

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{y-7}{2}(x-1)(x-2)$$

responde o problema para qualquer y . Em particular, para $y = 9$,

$$f(x) = 1 + 2x + (x-1)(x-2) = x^2 - x + 3.$$

Questão 3.

- (1.0) (a) Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Dê as definições de $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$, para $X \subset A$ e $Y \subset B$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, determine os conjuntos $f(\mathbb{R})$ e $f^{-1}(3)$.
- (1.0) (b) Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Prove que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, quaisquer que sejam $X, Y \subset A$. Dê um exemplo em que $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

UMA RESPOSTA

- (a) Definição da imagem de um subconjunto
- X
- de
- A
- :

$$f(X) = \{y \in B; f(x) = y \text{ para algum } x \in X\}.$$

Definição da pré-imagem de um subconjunto Y de B :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Agora consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função quadrática assume seu valor mínimo $f(-\frac{3}{4}) = \frac{23}{8}$ para $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4}$. Assim, $f(x) \geq \frac{23}{8}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{23}{8}, +\infty)$. Além disso, para todo $y \geq \frac{23}{8}$, a equação $f(x) = y$, ou seja, $2x^2 + 3x + 4 = y$, que equivale a $2x^2 + 3x + 4 - y = 0$, tem discriminante $\Delta = 9 - 32 + 8y \geq -23 + 23 = 0$, logo existe(m) valor(es) de x com $f(x) = y$. Assim $f(\mathbb{R}) = [\frac{23}{8}, +\infty)$.

$f^{-1}(3)$ é o conjunto dos pontos x tais que $f(x) = 3$, isto é, tais que $2x^2 + 3x + 4 = 3$. Então é o conjunto das soluções de $2x^2 + 3x + 1 = 0$, que é igual a $\{-1, -\frac{1}{2}\}$.

Comentário: $f^{-1}(3)$ é um abuso de linguagem amplamente aceito para designar $f^{-1}(\{3\})$.

- (b)
- $z \in f(X \cup Y)$
- se, e somente se, existe
- $w \in X \cup Y$
- tal que
- $f(w) = z$
- , que por sua vez ocorre se, e somente se, existe
- $x \in X$
- tal que
- $f(x) = z$
- ou existe
- $y \in Y$
- tal que
- $f(y) = z$
- , que ocorre se, e somente se,
- $z \in f(X)$
- ou
- $z \in f(Y)$
- , que ocorre se, e somente se,
- $z \in f(X) \cup f(Y)$
- .

Tome $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$, $X = [-1, 0]$ e $Y = [0, 1]$. Neste caso, $X \cap Y = \{0\}$ e $f(X) = f(Y) = [0, 1]$. Logo $f(X \cap Y) = \{f(0)\} = \{0\}$ e $f(X) \cap f(Y) = [0, 1]$.

Questão 4.

- (0.5) (a) Se $r \neq 0$ é um número racional, prove que $r\sqrt{2}$ é irracional.
- (0.5) (b) Dado qualquer número real $\epsilon > 0$, prove que existe um número irracional α tal que $0 < \alpha < \epsilon$.
- (1.0) (c) Mostre que todo intervalo $[a, b]$, com $a < b$, contém algum número irracional.

UMA RESPOSTA

(a) Se $r\sqrt{2}$ é racional, então $r\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, para $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Como $r \neq 0$, podemos dividir por r para obter $\sqrt{2} = \frac{p}{rq}$, de que resulta $\sqrt{2}$ racional, contradição.

(b) Escolha n um número natural maior do que $\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}$. Então $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{n}$ é positivo, irracional (pelo item (a)) e

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}/\epsilon} = \epsilon.$$

(c) Se a ou b for irracional, não há o que provar. Se a for racional, subtraindo a de todos os números do intervalo $[a, b]$, ficamos com o intervalo $[0, b - a]$. Tomando ϵ igual a $b - a$ no item (b), obtemos o irracional α menor do que $b - a$ e maior do que zero. Então $a + \alpha$ é irracional (se não fosse, então α seria a soma de dois racionais e, portanto, um racional, contradizendo (b)) e pertence ao intervalo $[a, b]$.

Questão 5.

Sejam m e n números naturais primos entre si.

- (1.0) (a) Mostre que $\frac{m}{n}$ é equivalente a uma fração decimal (isto é, com denominador potência de 10) se, e somente se, n não tem fatores primos diferentes de 2 ou 5.
- (1.0) (b) Mostre que se n tem outros fatores primos além de 2 ou 5 então a expansão decimal é infinita e, a partir de um certo ponto, periódica.

UMA RESPOSTA

(a) Sendo m e n primos entre si, uma fração equivalente a $\frac{m}{n}$ deve ter a forma $\frac{mp}{np}$ (obtida multiplicando-se m e n pelo mesmo número natural p).

Os fatores primos de uma potência de 10 são 2 e 5. Se $\frac{mp}{np}$ é fração decimal para algum p então $np = 10^r$. Logo, np só admite fatores primos iguais a 2 ou 5, e, portanto, n também.

Reciprocamente, se n possui apenas fatores primos iguais a 2 ou 5, então podemos multiplicar n por p de forma que o resultado seja uma potência de 10 (p pode ser ou uma potência de 2 ou uma potência de 5). Com esse p , $\frac{mp}{np}$ é uma fração decimal.

(b) Usando o processo tradicional da divisão continuada para transformar $\frac{m}{n}$ em fração decimal, como há fatores de n diferentes de 2 ou 5, em nenhuma etapa o resto da divisão é zero, logo a expansão nunca termina, ou seja, é infinita. Além disso, os diferentes restos (diferentes de zero) que ocorrem são todos menores do que n , portanto o número deles é no máximo $n - 1$. Assim, algum resto deve repetir-se e, a partir daí, o processo se repete: os restos se sucedem na mesma ordem anterior e, portanto, os quocientes também, o que fornece a periodicidade (observe que o período tem, no máximo, $n - 1$ números).