Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA11 - Cap. 4: Números Reais
30 de abril de 2022
Prof.: Pedro A. Hinojosa

> "É inteiramente irrelevante que um número real seja. por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo..."
> M. Spivak

1 Corpos

Definição 1.1 *Um corpo é um conjunto, não vazio,* $\mathbb{K}$, *munido de duas operações, que chamamos de adição e multiplicação,*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (x, y) \longrightarrow x + y \qquad e \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (x, y) \longrightarrow x \cdot y$$

que satisfazem as seguintes condições. Quaisquer que sejam x, y, $z \in \mathbb{K}$, *tem-se*
Axiomas da Adição

A1. Associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$;

A2. Comutatividade: $x + y = y + x$;

A3. Elemento Neutro: Existe $0 \in \mathbb{K}$, *tal que* $x + 0 = 0 + x = x$. *O elemento* $0 \in \mathbb{K}$ *chama-se zero;*

A4. Elemento Simétrico: Todo elemento $x \in \mathbb{K}$ *possui um simétrico* $-x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Axiomas da Multiplicação

M1. Associatividade: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

M2. Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$;

M3. Elemento Neutro: Existe $1 \in \mathbb{K}$, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. O elemento $1 \in \mathbb{K}$ chama-se um;

M4. Elemento Inverso Multiplicativo: Todo elemento $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, possui um inverso $x^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Axioma da Distributividade

D1. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Observações:

(1) O axioma A4 nos permite definir a operação de subtração em $\mathbb{K}$

$$- : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \ (x, y) \longrightarrow x - y := x + (-y).$$

(2) O elemento $0 \in \mathbb{K}$ dado no axioma A3, é único. De fato, se $\theta \in \mathbb{K}$ é outro elemento tal que $x + \theta = \theta + x = x$, então, em particular, $0 + \theta = 0$, mas, pelo axioma A3, $0 + \theta = \theta$, Logo $0 = \theta$.

(3) O simétrico de $x \in \mathbb{K}$, $-x$, dado pelo axioma A4 é único. De fato, se $\widetilde{x} \in \mathbb{K}$ é tal que $x + \widetilde{x} = 0$, então

$$\begin{aligned} x + (-x) = 0 = x + \widetilde{x} &\Longrightarrow -x + (x + (-x)) = -x + 0 = -x + (x + \widetilde{x}) \\ &\Longrightarrow (-x + x) + (-x) = -x = (-x + x) + \widetilde{x} \\ &\Longrightarrow -x = \widetilde{x}. \end{aligned}$$

(4) Analogamente mostra-se que os elementos, neutro, $1 \in \mathbb{K}$ e inverso, $x^{-1} \in \mathbb{K}$, multiplicativos, são únicos.

(5) O axioma D1 da distributividade permite explicar a *regra dos sinais:*

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) \qquad \text{e} \qquad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

De fato, $(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0$. Donde, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

Analogamente, $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Daí, $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y$. Em particular, $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Exemplos: Os conjuntos abaixo, com as operações dadas, são corpos.

(1) $\mathbb{Q}$: O Conjunto dos Números Racionais, com as operações usuais de adição e multiplicação:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(2) $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ $(\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ com as operações definidas abaixo

+	0	1
0	0	1
1	1	0

e

·	0	1
0	0	0
1	0	1

(3) $\mathbb{Q}(i) = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$ com as operações abaixo

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \text{e} \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

$\mathbb{Q}(i)$ é chamado *corpo dos números complexos racionais.* O neutro aditivo é $(0, 0)$, o neutro multiplicativo $(1, 0)$ e se $(a, b) \neq (0, 0)$, então $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

2 Corpos Ordenados

Definição 2.1 *Um corpo $\mathbb{K}$ é dito ordenado, se contém um subconjunto próprio C^+ que satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\forall x,\, y \in \mathbb{K} : x,\, y \in C^+ \Longrightarrow \begin{cases} x + y \in C^+ \\ x \cdot y \in C^+ \ ; \end{cases}$

(2) Dado $x \in \mathbb{K}$, somente uma das três alternativas seguintes é válida:

$$(1) \quad x \in C^+; \quad (2) \quad x = 0; \quad (3) \quad -x \in C^+.$$

O conjunto C^+ é chamado de *cone positivo* e seus elementos de *elementos positivos de* $\mathbb{K}$.

Indicando por C^- o conjunto $C^- = \{-x \in \mathbb{K} : x \in C^+\}$, temos: $\mathbb{K} = C^- \cup \{0\} \cup C^+$. Note que $C^+ \cap C^- = \phi$. Os elementos do conjunto C^- são chamados *negativos*.

Observação: Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado e $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, então $a^2 \in C^+$. De fato, como $a \neq 0$ temos, $a \in C^+$ ou $-a \in C^+$. No primeiro caso, $a \cdot a = a^2 \in C^+$, no segundo caso, $(-a) \cdot (-a) = a^2 \in C^+$.

Em particular $1 = 1 \cdot 1 \in C^+$. Ou seja, num corpo ordenado, 1 é sempre positivo e, portanto $-1 \in C^-$ é negativo e não pode ser quadrado de nenhum elemento.

Exemplos: Para os corpos do exemplo anterior, temos:

(1) $\mathbb{Q}$ é ordenado, o conjunto C^+ é formado pelos racionais $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tais que $a \cdot b \in \mathbb{N}$;

(2) $\mathbb{Z}_2$ não pode ser ordenado. $(1 + 1 = 0)$;

(3) $\mathbb{Q}(i)$ não pode ser ordenado. ($(0, 1)^2 = (-1, 0) = -(1, 0)$. Existe um elemento cujo quadrado é “ -1”).

Definição 2.2 *Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, dados $x,\, y \in \mathbb{K}$ dizemos que x é menor do que y, escrevemos $x < y$, se, e somente se, $y - x \in C^+$. Analogamente, dizemos que x é maior do que y, escrevemos $x > y$, quando $x - y \in C^+$*

Proposição 2.1 *Num corpo ordenado $\mathbb{K}$ a relação $\leq$ definida por:*

$$x \leq y \Longleftrightarrow x = y \quad ou \quad x < y$$

é uma relação de ordem.

Demonstração:

(1) $\leq$ é reflexiva. De fato, qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$ temos, $x = x$. Logo $x \leq x$.

(2) $\leq$ é antissimétrica. Dados $x,\, y \in \mathbb{K}$ tais que $x \leq y$ e $y \leq x$, temos: $x = y$, ou $x - y \in C^+$ e $y - x = -(x - y) \in C^+$. Mas $x - y \in C^+$ e $-(x - y) \in C^+$ é contraditório, logo $x = y$.

(3) $\leq$ é transitiva.

$$\begin{aligned} x \leq y \ \text{ e } \ y \leq z \ &\Longrightarrow \ (x = y \ \text{ ou } (y - x) \in C^+) \ \text{ e } \ (y = z \ \text{ ou } \ (z - y) \in C^+) \\ &\Longrightarrow \ x = z \ \text{ ou } \ (y - x) + (z - y) \in C^+ \\ &\Longrightarrow \ x = z \ \text{ ou } \ (z - x) \in C^+ \\ &\Longrightarrow \ x \leq z. \qquad \square \end{aligned}$$

Observação 1: Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Então, $0 < 1 \quad (1 - 0 = 1 \in C^+)$. Dai, $1 < 1+1 < 1+1+1 < ...$ Ou seja, o subconjunto $X \subset \mathbb{K}$, $X = \{1,\, 1+1,\, 1+1+1,\, ...\}$ é infinito. Podemos identificar o conjunto $X \subset \mathbb{K}$ com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, para tanto, denotemos, temporariamente, o neutro multiplicativo de $\mathbb{K}$ por $\mathbb{1}$. Definimos, indutivamente, a função $f : \mathbb{N} \to X$, pondo $f(1) = \mathbb{1}$ e $f(n+1) = f(n) + \mathbb{1}$. f define uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e X. Identificando o conjunto X com $\mathbb{N}$ podemos pensar $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ e voltamos a escrever $\mathbb{1} = 1$.

Observação 2: Continuemos com $\mathbb{K}$ corpo ordenado e, como na observação anterior, $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$. Obtemos o conjunto $\mathbb{Z}$ ao considerarmos $0 \in \mathbb{K}$ e os simétricos $-n$ dos elementos $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$. Mais ainda, se $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, então existe $q^{-1} \in \mathbb{K}$ e podemos considerar o conjunto dos elementos da forma $\frac{p}{q} = p \cdot q^{-1}$, com $p,\, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. O conjunto assim obtido é um subcorpo de $\mathbb{K}$ que se identifica naturalmente com $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais.

Assim, em todo corpo ordenado $\mathbb{K}$ podemos considerar, de modo natural, as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

3 Intervalos - Valor Absoluto

Num corpo ordenado podemos definir as importantes noções de intervalo e valor absoluto.

Definição 3.1 *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a,\, b \in \mathbb{K}$ tais que $a < b$. Definimos os seguintes conjuntos:*

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}$,
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x < b\}$,
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{K} : a < x \leq b\}$,
4. $(a, b) = \{x \in \mathbb{K} : a < x < b\}$,
5. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{K} : x \leq b\}$,
6. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{K} : x < b\}$,
7. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x\}$, *e*
8. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{K} : a < x\}$.

que chamamos de intervalos.

Os quatro primeiros são limitados de extremos a e b e os quatro últimos são ilimitados.

$[a, b]$ é um intervalo fechado, $[a, b)$ é fechado à esquerda e aberto a direita, $(a, b]$ é aberto à esquerda e fechado à direita e (a, b) e aberto

$(-\infty, b]$ e $(-\infty, b)$, são semi-retas à esquerda de origem b, fechada e aberta, respectivamente. Analogamente $[a, +\infty)$ e $(a, +\infty)$, são semi-retas à direita de origem a fechada e aberta, respectivamente.

Ao tomar o intervalo $[a, b]$, vamos considerar também o caso em que $a = b$. Neste caso, $[a, a] = \{a\}$ será chamado de intervalo degenerado.

Note que, se $a < b$, então cada um dos intervalos acima é um conjunto infinito. Basta observar que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Definição 3.2 *Dado um corpo ordenado $\mathbb{K}$, definimos a função valor absoluto como:*

$$| \; | : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \ |x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Note que : $\quad |x| = máx\{x, -x\}$.

Proposição 3.1 *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado e* x, $a \in \mathbb{K}$. *Então:*

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} -a \leq x \leq a &\iff -a \leq x \ \text{ e } \ a \geq x \\ &\iff a \geq -x \ \text{ e } \ a \geq x \\ &\iff a \geq |x| \qquad\qquad (|x| = \text{máx}\{x, -x\}) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2 *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado e* x, y, $z \in \mathbb{K}$ *elementos quaisquer. Temos:*

(1) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(3) $|x| - |y| \leq |\, |x| - |y| \,| \leq |x - y|$.

Demonstração: Exercício.

Teorema 3.3 *Num corpo ordenado* $\mathbb{K}$ *as seguintes afirmações são equivalentes.*

(1) Dados a, $b \in \mathbb{K}$, *com* $a > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$;

(2) Para cada $a \in \mathbb{K}$, $a > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração: Exercício.

Definição 3.3 *Um corpo ordenado* $\mathbb{K}$ *no qual vale qualquer uma das duas afirmações do teorema acima, é dito um corpo arquimediano.*

exemplo: $\mathbb{Q}$ é um corpo arquimediano.

4 Números Reais

Definição 4.1 *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado e* $X \subset \mathbb{K}$ *um subconjunto. Dizemos que* X *é limitado superiormente (inferiormente) se existe* $b \in \mathbb{K}$ *(*$a \in \mathbb{K}$*) tal que, para todos* $x \in X$, *tem-se:* $x \leq b$ *(*$a \leq x$*). Os elementos* $a \in \mathbb{K}$ *e* $b \in \mathbb{K}$, *quando existem, são chamados, respectivamente, de cotas superior e inferior do conjunto* X.

Se X *é limitado inferior e superiormente dizemos, simplesmente, que* X *é limitado.*

Exemplo:

(1) O intervalos $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ e (a, b) são limitados inferior e superiormente e, em cada caso, $a \in \mathbb{K}$ é uma cota inferior e $b \in \mathbb{K}$ é uma cota superior.

(2) Os intervalos $(-\infty, b)$ e $(-\infty, b]$ são limitados superiormente e, em ambos os casos, $b \in \mathbb{K}$ é uma cota superior

Definição 4.2 *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado e* $X \subset \mathbb{K}$ *um subconjunto limitado superiormente (inferiormente). Um elemento* $b \in \mathbb{K}$ *(*$a \in \mathbb{K}$*) chama-se supremo (ínfimo) do subconjunto* X *se* b *(*a*) é a menor (maior) das cotas superiores (inferiores) de* X *em* $\mathbb{K}$.

Observações:

(1) Para que $b \in \mathbb{K}$ seja o supremo de X é necessário e suficiente que se verifiquem as duas condições abaixo:

(i) b é cota superior de X. Ou seja,

$$\boxed{\text{para todo } x \in X, \text{ tem-se } x \leq b;}$$

(ii) b é a menor das cotas superiores. Isto é,

$$\boxed{\text{Se } c \in \mathbb{K} \text{ é tal que } x \leq c, \text{ para todo } x \in X, \text{ então } b \leq c.}$$

(2) Se b_1 e b_2 são dois elementos de X que satisfazem as condições (i) é (ii) acima, então devemos ter, $b_1 \leq b_2$ e também $b_2 \leq b_1$, portanto $b_1 = b_2$. Assim, o supremo de um conjunto, quando existe, é único. É claro que o mesmo vale para o ínfimo.

Denotamos o supremo e o ínfimo de X, respectivamente, por: $sup(X)$ e $inf(X)$.

Exemplo:

(1) Se $X = (a, b)$, ou $X = (a, b]$, ou $X = [a, b)$, ou $X = [a, b]$ então $inf(X) = a$ e $sup(X) = b$;

(2) Se $X = (-\infty, b)$, então $sup(X) = b$ e, como X não é limitado inferiormente, não tem cotas inferiores e portanto, não tem ínfimo;

(3) Seja $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Temos $inf(X) = 0$ e $sup(x) = 1$. ($\mathbb{Q}$ é arquimediano.)

Uma das insuficiências dos números racionais é a de que alguns subconjuntos limitados, não possuem supremo ou ínfimo. Por exemplo o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ é limitado superiormente e não possui supremo em X. (Veja o Lema abaixo.)

Lema 4.1 *Não existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.*

Demonstração: Suponhamos que existem p, $q \in \mathbb{Z}$, primos entre si, tais que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Então, $p^2 = 2q^2$, de modo que p^2 é par e, portanto p é par (o quadrado de um número impar é outro número impar). Assim, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2k$, daí $p^2 = 4k^2$ e logo $4k^2 = 2q^2$, donde $q^2 = 2k^2$. Ou seja, q também é par. Isto contradiz o fato de p e q serem primos entre si.

$\square$

Exemplos:

(1) Seja $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. É claro que X é limitado inferiormente e que $inf(X) = 0 \in X$. O conjunto X também é limitado superiormente, por exemplo, $5 \in \mathbb{Q}$ é uma cota superior. Mas, X não tem elemento máximo. De fato, suponhamos que $sup(X) = x_0 \in X$. Vamos encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < 1$ e $(x_0 + r) \in X$, o que contradiz nossa hipótese inicial $sup(X) = x_0$. Temos:

$$\begin{aligned}
(x_0 + r)^2 &= x_0^2 + 2x_0 r + r^2 \\
&< x_0^2 + 2x_0 r + r \qquad (r < 1) \\
&= x_0^2 + r(2x_0 + 1)
\end{aligned}$$

Daí,

$$(x_0+r)^2 < 2 \Longleftrightarrow x_0^2 + r(2x_0+1) < 2. \quad \text{Ou seja,} \quad (x_0+r)^2 < 2 \Longleftrightarrow r < \frac{2-x_0^2}{2x_0+1}.$$

Portanto, basta escolher $r < \text{máx}\left\{1, \frac{2-x_0^2}{2x_0+1}\right\}$ e teremos $(x_0+r)^2 < 2$, ou seja, $x_0 + r \in X$.

(2) $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$ é um conjunto limitado inferiormente. Entretanto, $inf(Y) \notin Y$.

(3) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, não arquimediano. Neste caso o conjunto dos "números naturais" $\mathbb{N} = \{1,\, 1+1,\, 1+1+1, ...\} \subset \mathbb{K}$ é limitado superiormente e se $b \in \mathbb{K}$ é uma cota superior de $\mathbb{N}$, então $n+1 \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $n \leq b-1$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, se $b \in \mathbb{K}$ é uma cota superior de $\mathbb{N}$, então $b-1$ também e como $b-1 < b$ segue-se que, num corpo não arquimediano $\mathbb{K}$, o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado superiormente mas não possui supremo em $\mathbb{K}$.

Definição 4.3 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dizemos que $\mathbb{K}$ é completo se todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{K}$.*

É claro que se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, completo, então todo conjunto, não vazio, $X \subset \mathbb{K}$ limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{K}$. De fato, se $X \subset \mathbb{K}$, $X \neq \phi$, é limitado inferiormente, então o conjunto $-X = \{-x : x \in X\}$ é , claramente não vazio e limitado superiormente, logo existe $a = sup(-X) \in \mathbb{K}$. é imediato verificar que $-a = inf(X)$.

Agora aceitaremos a existência de um corpo ordenado e completo que chamaremos de **corpo dos números reais** e denotamos por $\mathbb{R}$.

No exemplo (1), anterior, consideramos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e vimos que X é limitado superiormente, mas não possui supremos em $\mathbb{Q}$. Assim, não existe em $\mathbb{Q}$ um elemento cujo quadrado seja igual a 2. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e logo $X \subset \mathbb{R}$. Além disso, em $\mathbb{R}$ todo conjunto limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$, de modo que em $\mathbb{R}$ existe $a = sup(X)$. Este elemento é tal que $a^2 = 2$. Escrevemos $a = \sqrt{2}$.

É claro que existe um único numero real positivo cujo quadrado é 2. De fato, se $b \in \mathbb{R}$ é outro número positivo tal que $b^2 = 2$, então

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = 2 &\Longrightarrow a^2 - b^2 = 0 \\ &\Longrightarrow (a+b)(a-b) = 0 \\ &\Longrightarrow a+b = 0 \ \text{ ou } \ a-b = 0 \\ &\Longrightarrow a = -b \ \text{ ou } \ a = b. \end{aligned}$$

O caso $a = -b$ não pode acontecer com a e b positivos.

Como vimos, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Os elementos do conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são chamados de *números irracionais*.

É possível mostrar que, dados $a \in \mathbb{R}, a > 0$, e $n \in \mathbb{N}$, existe um único número real, $b > 0$, tal que $a^n = b$. Este número é denotado por $\sqrt[n]{a}$ e chama-se *raiz n-ésima de a.*

É fácil verificar que, dados m, $n \in \mathbb{N}$, se $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt[n]{m} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Assim, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{10}$, etc. são números irracionais. Na verdade, "existem mais números irracionais do que racionais."

Definição 4.4 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, todo intervalo aberto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ contém algum ponto de X.*

i.e. $\quad X \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists\, x \in X$ tal que $a < x < b$.

Teorema 4.2 *Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(a,b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto qualquer. Queremos mostrar que existem um número racional e um número irracional em (a,b).

Como $b - a > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. Seja $A = \{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{p} \geq b\}$. Sendo $\mathbb{R}$ arquimediano, $A \neq \phi$. Além disso, bp é uma cota inferior de A. De fato, se para algum $m \in A$, $bp > m$, então $\frac{m}{p} < b$, mas $m \in A$, logo $\frac{m}{p} \geq b$ o que é uma contradição. Assim, A é um conjunto não vazio limitado inferiormente.

Seja m_0 o menor elemento de A. Então $\frac{m_0}{p} \geq b$ e como $m_0 - 1 < m_0$, $\frac{m_0-1}{p} < b$.

Afirmação: $a < \frac{m_0-1}{p} < b$.

Caso contrário, $\frac{m_0-1}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0}{p}$, donde $b - a \leq \frac{m_0}{p} - \frac{m_0-1}{p} = \frac{1}{p}$. Contradição.

Portanto, $\frac{m_0-1}{p} \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$.

Para obter um número irracional em (a,b) tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, ou seja, $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Os números da forma $\frac{m\sqrt{2}}{p}$ são irracionais e dividem a reta real em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Como $\frac{\sqrt{2}}{p}$ é menor do que o comprimento, $b - a$, do intervalo (a,b) conclui-se que para algum $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{m\sqrt{2}}{p} \in (a,b)$. De forma análoga ao caso anterior, se $m_1 \in \mathbb{Z}$ for o menor inteiro tal que $b < \frac{m_1\sqrt{2}}{p}$, então $\frac{(m_1-1)\sqrt{2}}{p} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a,b)$.

$\square$

Teorema 4.3 (Princípio dos Intervalos Encaixados) *Consideremos uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ com $I_n = [a_n, b_n]$. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.*

Mais precisamente, se $a = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $b = inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b]$.

Demonstração: Pra cada $n \in \mathbb{N}$ temos $I_{n+1} \subset I_n$, logo $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$. De modo que podemos escrever, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$. Sejam $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Os conjuntos A e B são limitados. De fato, a_1 é cota inferior de A e qualquer b_n é cota superior; já para B, b_1 é cota superior e qualquer a_n é cota inferior. Sejam $a = sup(A)$ e $b = inf(B)$. É claro que $a \leq b$ e podemos escrever $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq a \leq b \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$. Dai, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in I_n = [a_n, b_n]$, e logo, $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. (Note que poderíamos ter $a = b$).

Por outro lado, se $x < a = sup(A)$, então existe $a_n \in A$ tal que $x < a_n$. Daí, $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Analogamente, se $y > b = inf(B)$, então $y \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Concluímos que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

$\square$

Agora usaremos o teorema anterior para mostrar que o conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Teorema 4.4 *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Usaremos, repetidamente, o seguinte fato: dados um intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$ com $a < b$ e um número real x_0, existe um intervalo $J = [c, d]$, com $c < d$ tal que $J \subset I$ e $x_o \notin J$.

Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ um conjunto enumerável e sejam I_1 um intervalo fechado, limitado e não degenerado tal que $x_1 \notin I_1$, I_2 um intervalo do mesmo tipo que I_1 tal que $I_2 \subset I_1$ e $x_2 \notin I_2$. Supondo que temos $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n$ limitados fechados e não degenerados, com $x_j \notin I_j$, $1 \leq j \leq n$ podemos obter $I_{n+1} \subset I_n$, com $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Assim, temos uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ de intervalos não degenerados, limitados e fechados. Pelo teorema anterior, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin I_n$; temos $x \neq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e logo $x \notin X$. Ou seja, nenhum conjunto enumerável pode conter todos os números reais.

$\square$

Corolário 4.5 *Todo intervalo não degenerado de números reis é não enumerável.*

Demonstração: Como $f : (0, 1) \to (a, b)$, $f(t) = a + (b - a)t$ é uma bijeção, basta mostrar que $(0, 1)$ é não enumerável.

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $g : (0, 1) \to (n, n + 1)$, $g(x) = x + n$ também é uma bijeção, de modo que se $(0, 1)$ é enumerável então, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n, n + 1)$ também é, logo $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1)$ seria uma união enumerável de conjuntos enumeráveis e portanto, enumerável o que é uma contradição. $\square$

Corolário 4.6 *O conjunto* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *dos números irracionais, é não enumerável.*

Demonstração: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fosse enumerável, $\mathbb{R}$ por ser união de dois conjuntos enumeráveis também seria enumerável. $\square$