Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

1^a Prova: Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

19 de dezembro de 2024
Prof: Pedro A. Hinojosa

Nome: ____________________________________ Matrícula: ____________________

Obs: Esta prova vale 5 pontos.

1 (2,0 pts.) *Considere os pontos* $A = (2, -1, -5)$, $B = (-1, 3, 2)$, $C = (6, -1, 19)$ *e* $D = (9, -5, 12)$

(a) *Verifique que os pontos* A, B, C *e* D *são coplanares;*

(b) *O quadrilátero* $\Box ABCD$ *é um paralelogramo?*

2 (2,0 pts.) *Dados os vetores* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ *e* $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$.

(a) *Verifique que eles formam uma base para* $\mathbb{R}^3$;

(b) *Determine as coordenadas do vetor* $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *nessa base.*

3 (1,0 pto.) *Sejam* $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *e* $A = (2, 1, 3)$. *Encontre um ponto* B *tal que* $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{v}$.

Boa Prova

CVGA: Prova 1 2024.2

(1) $A = (2, -1, -5)$, $B = (-1, 3, 2)$, $C = (6, -1, 19)$ e $D = (9, -5, 12)$

(a) A, B, C e D são coplanares?
(b) $\square ABCD$ é um paralelogramo?

Solução

a) $\overrightarrow{AB} = [-3, 4, 7]$, $\overrightarrow{AC} = [4, 0, 24]$

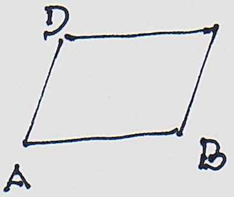
$\overrightarrow{AD} = [7, -4, 17]$

$$\det\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & -4 \\ 7 & 24 & 17 \end{pmatrix} = 0 + \overset{672}{\cancel{384}} - 112 - 0 - 288 - 272$$

$$= 0$$

Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são l.d. Logo os ptos A, B, C e D são coplanares

b)



$\overrightarrow{AB} = [-3, 4, 7]$
$\overrightarrow{DC} = [-3, 4, 7]$

$\underbrace{\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}}$

$\overrightarrow{AD} = [7, -4, 17]$
$\overrightarrow{BC} = [7, -4, 17]$

$\underbrace{\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}}$

$\therefore$ $\square$ ABCD é um paralelogramo.

(2) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$?

b) Determinar as coord. de $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ nessa base.

Solução

a) Como são 3 vetores, basta verificar que eles são l.i.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = -3 + 0 + 8 - 0 + 2 + 0$$
$$= 7 \neq 0 \;\ldots\; (*)$$

$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. $\therefore$ formam uma base p/ $\mathbb{R}^3$.

b) $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, (x, y e z são as coord. de $\vec{a}$ na base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$)

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x(\vec{i} + 2\vec{k}) + y(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + z(2\vec{j} - 3k)$$
$$= (x + 2y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (2x - y - 3z)\vec{k}$$

Daí

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + 2z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 7 \qquad (\text{veja } (*) \text{ acima})$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 0 + 8 - 0 - 2 + 6 = \underline{15}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{15}{7}}$$

$$\frac{15}{7} + 2y = -1 \Rightarrow 2y = -1 - \frac{15}{7} = \frac{-22}{7}$$

$$\boxed{y = \frac{-11}{7}}$$

$$\frac{-11}{7} + 2z = 1 \Rightarrow 2z = 1 + \frac{11}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\boxed{z = 9/7}$$

$$\frac{15}{7} + 2\left(\frac{-11}{7}\right) = \frac{15-22}{7} = \frac{-7}{7} = -1 \checkmark$$

$$-\frac{11}{7} + 2\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{18-11}{7} = \frac{7}{7} = 1 \checkmark$$

$$2\left(\frac{15}{7}\right) - \left(\frac{-11}{7}\right) - 3\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{30+11-27}{7} = \frac{14}{7} = 2 \checkmark$$

As coord. de $\vec{a}$ na base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são

$\frac{15}{7}$, $\frac{-11}{7}$ e $\frac{9}{7}$

i.e $\quad \boxed{\vec{a} = \frac{15}{7}\vec{u} - \frac{11}{7}\vec{v} + \frac{9}{7}\vec{w}}$

Outra solução

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$\boxed{z = 9/7} \checkmark$

$$y + 2z = 1$$
$$\Rightarrow y + \frac{18}{7} = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{y = -11/7} \checkmark$$

$$x - 4z = -3$$
$$\Rightarrow x - 4\left(9/7\right) = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -3 + \frac{36}{7} = \frac{15}{7}$$

$$\boxed{x = 15/7}$$

etc !!

(3) $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$A = (2, 1, 3)$

Encontrar B t.q. $\overrightarrow{AB} = -2\vec{v}$

<u>Solução</u>

Suponha $B = (x, y, z)$.

$\overrightarrow{AB} = [x-2,\ y-1,\ z-3]$

$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 6 \\ y-1 = -4 \\ z-3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = 8, \quad y = -3, \quad z = 1$$

$\therefore \quad B = (8, -3, 1)$