Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

1^a Prova: Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

22 de fevereiro de 2024

Prof: Pedro A. Hinojosa

Nome: ____ Matrícula: ____________________

1 (2,5 pts.) *Seja* $\square ABCD$ *um paralelogramo e seja* G *o ponto de interseção das diagonais. Sabendo que* $A = (2, -1, -5), B = (-1, 3, 2)$ *e* $G = (4, -1, 7)$, *determine os vértices* C *e* D.

2 (2,5 pts.) *Dados os vetores* $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$ *e* $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, *verifique que eles determinam um paralelepípedo e calcule o seu volume.*

3 (2,5 pts.) *Verifique que os vetores* $\overrightarrow{u} = [1, 1, 1]$, $\overrightarrow{v} = [-1, 1, 0]$ *e* $\overrightarrow{w} = [1, 0, -1]$ *formam uma base para* $\mathbb{R}^3$ *e determine as coordenadas do vetor* $\overrightarrow{a} = [2, 1, -2]$ *nessa base*

4 (2,5 pts.) *Verifique que os pontos* $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ *e* $C = (1, 1, 1)$ *são vértices de um triângulo retângulo e calcule a área desse triângulo.*

5 (1,0 pto.) *Sejam* $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ *e* $\overrightarrow{v}_3$ *vetores li. em* R^3 *e sejam,* $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3$ *e* $\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_3$. *Os vetores* $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$ *e* $\overrightarrow{u}_3$ *são li.?*

CVGA - P1 - 2024.1

① $\square ABCD$ é um paralelogramo.

G pto de interseção das diagonais

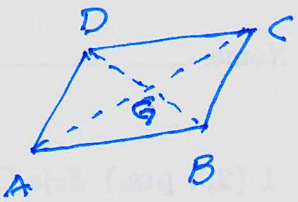
$A = (2, -1, -5)$, $B = (-1, 3, 2)$, $G = (4, -1, 7)$

$C = ?$, $D = ?$

Solução

Sabemos que as diagonais de um paralelogramo se intersetam no pto médio das mesmas. Então

G é o pto médio de AC e de BD



Ou também, $\begin{cases} \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \end{cases}$

Suponha $C = (c_1, c_2, c_3)$ e $D = (d_1, d_2, d_3)$.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[c_1 - 2, c_2 + 1, c_3 + 5]$

$\overrightarrow{AG} = [2, 0, 12]$

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{1}{2}(c_1 - 2) = 2 \quad \therefore \boxed{c_1 = 6}$

$\frac{1}{2}(c_2 + 1) = 0 \quad \therefore \boxed{c_2 = -1}$

$\frac{1}{2}(c_3 + 5) = 12 \quad \therefore c_3 = 19$

$$\therefore \boxed{C = (6, -1, 19)}$$

$\overrightarrow{BG} = [5, -4, 5]$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}[d_1 + 1, d_2 - 3, d_3 - 2]$

$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \Rightarrow \frac{d_1 + 1}{2} = 5 \quad \boxed{d_1 = 9}$

$\frac{d_2 - 3}{2} = -4 \quad \boxed{d_2 = -5} \qquad \therefore \boxed{D = (9, -5, 12)}$

$\frac{d_3 - 2}{2} = 5 \quad \boxed{d_3 = 12}$

(2) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - k$
$\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$
$\vec{w} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$

Verificar que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ determinam um paralelepípedo e calcular seu volume.

<u>Solução</u>

Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores l.i. eles determinam um paralelepípedo e seu volume é dado por $|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|$ (módulo do produto misto)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 0+0-2-0-8+3 = -7 \neq 0$$

$\therefore$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i.

Eles determinam um paralelepípedo.

volume do paralelepípedo $= |-7| = 7$

<u>certo?</u>

$$\left(\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = -7 \right)$$

(3) $\vec{u} = [1, 1, 1]$
$\vec{v} = [-1, 1, 0]$
$\vec{w} = [1, 0, -1]$

$\vec{a} = [2, 1, -2]$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam uma base para $\mathbb{R}^3$.
~~Ex~~ Determinar as coord. de $\vec{a}$ nessa base.

<u>Solução</u>

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 0 - 1 + 0 - 1 = -3 \neq 0$$

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. Portanto formam uma base para $\mathbb{R}^3$ (são 3).

$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, $x = ?$, $y = ?$, $z = ?$

$$[2, 1, -2] = x[1, 1, 1] + y[-1, 1, 0] + z[1, 0, -1]$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{array}\right)$$

$\therefore$ $x = 1/3$, $y = 2/3$, $z = 7/3$

Essas são as coord. de $\vec{a}$ na base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

Outra solução do sistema (*)

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-2+2-1}{-3} = \frac{-1}{-3} = 1/3 \qquad \boxed{x = 1/3}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1-2-1+2}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad \boxed{y = 2/3}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-2-1-2-2}{-3} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3} \qquad \boxed{z = 7/3}$$

---

4. $A = (1,0,1)$, $B = (-1,0,2)$, $C = (1,1,1)$ — Os ptos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo? Calcular a área desse triângulo.

Solução

$\vec{AB} = [-2, 0, 1]$, $\vec{AC} = [0, 1, 0]$ — $\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$ Logo A, B e C são vértices de um triângulo

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0+0+0 = 0 \therefore \vec{AB} \perp \vec{AC}$

O ΔABC é retângulo. (em A)

$$\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{5}/2$$

$\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são os catetos

$\vec{AB} \times \vec{AC} = [1, 0, -2]$, $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(5) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vetores l.i em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ u_3 = \vec{v}_1 + v_3 \end{cases}$$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ são l.i. ?

<u>Solução</u>

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$\therefore$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ são l.i.

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + y(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + z(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (x+z)\vec{v}_1 + (x+y)\vec{v}_2 + (y+z)\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Este sistema <u>só</u> tem a solução $x=0, y=0, z=0$ (veja o determinante calculado acima)

$\therefore$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ e u_3 são l.i.