Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

1^a Prova: Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

22 de fevereiro de 2024

Prof: Pedro A. Hinojosa

Nome: ______________________________ Matrícula: ____________________

1 (1,5 pts.) *Considere o ponto* $P = (1, -2, 3)$ *e o vetor* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$. *Determine um ponto* Q *de modo que* $\overrightarrow{PQ} = -5\overrightarrow{v}$.

2 (2,0 pts.) *Considere um triângulo de vértices* P, Q *e* R, ΔPQR, *seja* S *um ponto no lado* PQ *tal que* $\overrightarrow{PS} = 5\overrightarrow{SQ}$. *Escreva o vetor* $\overrightarrow{RS}$ *como combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{RP}$ *e* $\overrightarrow{QR}$.

3 (2,5 pts.) *Sejam* $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right)$, $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$ *e* $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$. *Prove que estes vetores formam uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$. *Determine as coordenadas do vetor* $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *nessa base.*

4 (2,5 pts.) *Considere os pontos* $A = (1, 2, 1)$, $B = (-1, 0, -3)$ *e* $C = (2, 1, 0)$.

(a) Verifique que os pontos A, B *e* C *não são colineares;*

(b) Calcule a área do triângulo ΔABC.

5 (2,0 pts.) *Considere os vetores* $\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *e* $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. *Determine a projeção ortogonal de* $\overrightarrow{v}$ *sobre* $\overrightarrow{w}$, *ou seja,* $proj_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$.

CVGA - P1 - 2023.2

① $P=(1,-2,3)$ $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

Determinar Q de modo que $\overrightarrow{PQ}=-5\vec{v}$.

Solução

Seja $Q=(x,y,z)$.

$$\overrightarrow{PQ}=[x-1,y+2,z-3]$$

$$\overrightarrow{PQ}=-5\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x-1=-5 \\ y+2=5 \\ z-3=-15 \end{cases}$$

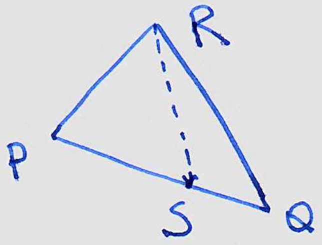
$$\Rightarrow x=-4,\ y=3,\ z=-12$$

$$\therefore\ Q=(-4,3,-12)$$

② P, Q, R vértices de um triângulo. S um pto no lado PQ t.q. $\overrightarrow{PS}=5\overrightarrow{SQ}$.

Escrever $\overrightarrow{RS}$ como comb. linear de $\overrightarrow{RP}$ e $\overrightarrow{QR}$

Solução:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PS} \\ &= \overrightarrow{RP}+5\overrightarrow{SQ} \\ &= \overrightarrow{RP}+5(\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RQ}) \\ &= \overrightarrow{RP}+5\overrightarrow{SR}+5\overrightarrow{RQ} \\ &= \overrightarrow{RP}-5\overrightarrow{RS}-5\overrightarrow{QR}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RP}-5\overrightarrow{QR}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{RS}=\frac{1}{6}\overrightarrow{RP}-\frac{5}{6}\overrightarrow{QR}$$

③ $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k})$

$$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$$

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^3$
- Determinar as coord. de $\vec{a} = 3\vec{i}-5\vec{j}+3k$ nessa base.

Solução

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0+1-1) = 0 \quad \therefore \quad \vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(2-1-1) = 0 \quad \therefore \quad \vec{u}\perp\vec{w}$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(0-1+1) = 0 \quad \therefore \quad \vec{v}\perp\vec{w}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais 2 a 2, em particular são l.i. e sendo 3 vetores formam uma base p/ $\mathbb{R}^3$

$\therefore$ $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base ortogonal.

$\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1 \quad \therefore \quad \|\vec{u}\| = 1$

$\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \quad \therefore \quad \|\vec{v}\| = 1$

$\|\vec{w}\|^2 = \frac{1}{6}(4+1+1) = 1 \quad \therefore \quad \|w\| = 1$

Daí, $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base ortonormal

Queremos escrever $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

(x, y, z são as coord. de $\vec{a}$ na base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

$$\vec a = x\vec u + y\vec v + z\vec w$$

$$\Rightarrow \quad \vec a\cdot\vec u = x\,\underbrace{\vec u\cdot\vec u}_{\|u\|^2 = 1} + y\,\cancelto{0}{\vec v\cdot\vec u} + z\,\cancelto{0}{\vec w\cdot\vec u}$$

$$= x$$

$$\therefore \quad x = \vec a\cdot\vec u = \frac{1}{\sqrt3}(3-5-3) = -5/\sqrt3$$

Analogamente,

$$y = \vec a\cdot\vec v = \frac{1}{\sqrt2}(0-5+3) = -2/\sqrt2 = -\sqrt2$$

e

$$z = \vec a\cdot\vec w = \frac{1}{\sqrt6}(6+5+3) = 14/\sqrt6$$

$\therefore$ as coord. de $\vec a$ na base $\{\vec u, \vec v, \vec w\}$ são

$-5/\sqrt3$, $-\sqrt2$, $14/\sqrt6$

---

(4) $A = (1,2,1)$, $B = (-1,0,-3)$ e $C = (2,1,0)$

(a) A, B e C não são colineares

(b) Calcular área(ΔABC)

Solução

(a) $\vec{AB} = [-1-1, 0-2, -3-1] = [-2, -2, -4]$

$\vec{AC} = [2-1, 1-2, 0-1] = [1, -1, -1]$

É claro que $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ não são paralelos

$\therefore$ A, B e C não são colineares

$$\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \sqrt{4+36+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{14} = \sqrt{14}$$

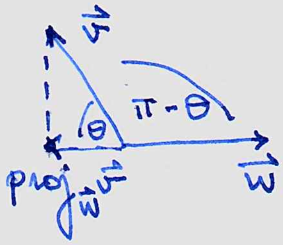
(5) $\vec{v} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

Determinar $proj_{\vec{w}}\vec{v}$

Solução

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = -10 - 3 + 4 = -9 < 0 \Rightarrow \measuredangle(\vec{v},\vec{w}) > 90°$$

$$\Downarrow$$



$$proj_{\vec{w}}\vec{v} = \lambda\vec{w} \ , \ \lambda < 0 \ !$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38} \ , \ \|\vec{w}\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{\|proj_{\vec{w}}\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\lambda|\cdot\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{38}}|\lambda|$$

$$\pi - \theta = \measuredangle(v,w) \ , \ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} = \frac{-9}{3\sqrt{38}} = -\frac{3}{\sqrt{38}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{38}} = \frac{3}{\sqrt{38}}|\lambda| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

$$\therefore \lambda = -1 \quad (\lambda < 0)$$

Daí $proj_{\vec{w}}\vec{v} = -\vec{w}$