



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
<http://www.mat.ufpb.br>

Cálculo III - 2ª Prova - 2024.2

João Pessoa, 24 de fevereiro de 2024

Professor: Pedro A. Hinojosa

Nome: _____ Matrícula: _____

Obs: Esta Prova vale 5 pontos.

Questão 1 (3.0 pts) Calcule $\int_W f dV$, onde f e W são dados por:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $W : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$;

(b) $f(x, y, z) = z$, $W : \text{é a região interior às superfícies } \begin{cases} z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$

Questão 2 (2.0 pts.) Calcule o momento de inércia com relação ao eixo Z do sólido limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$, sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto ao plano XY .

Boa Prova !!

C3

2024.2

Prova 2 (Prova 1 - Parte 2)

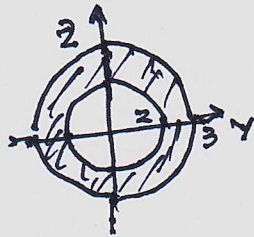
1

① Calcular $\int_W f \, dv$

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

$W: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Solução:



coord. Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \cos \theta \\ y = \rho \cos \phi \sin \theta \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \quad J = \rho^2 \sin \phi$$

$$W_{\rho\phi\theta}: \begin{cases} 2 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_W f \, dv = \int_2^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \phi \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \int_2^3 \rho^4 \cos^2 \phi \, d\rho \, d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_2^3 \cos^2 \phi \, d\phi$$

$$= \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) \int_0^\pi \cos^2 \phi \, d\phi$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 243 \left[-\cos \phi \Big|_0^\pi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \Big|_0^\pi \right]$$

$$= \frac{2 \cdot 243}{5} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2 \cdot 243 \cdot 4}{15}$$

$$= \frac{844}{15}$$

$$\begin{cases} 3^5 = 243 \\ 2^5 = 32 \end{cases}$$

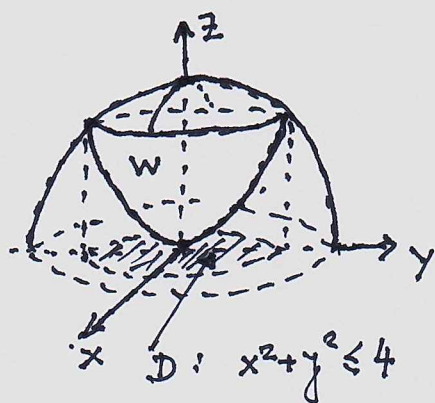
(b) $f(x, y, z) = z$

W: Região limitada pelas superf.

$$\begin{cases} z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$$

2

Solução:



coord. cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r &= r \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4z + z^2 &= 5 \\ z^2 + 4z - 5 &= 0 \\ (z-1)(z+5) &= 0 \\ \underline{\underline{z=1}}, \quad \underline{\underline{z=-5}} \\ &\quad (N\tilde{a}o, z \geq 0) \end{aligned}$$

$$z=1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{1}{4}r^2 \leq z \leq \sqrt{5-r^2} \end{cases}$$

$$\int_W f dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}} z \cdot r dz dr d\theta$$

$$\int_W f dV = 2\pi \int_0^2 r \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}} dr$$

$$= \pi \int_0^2 r \left[(5-r^2) - \frac{1}{16} r^4 \right] dr = \pi \int_0^2 \left(5r - r^3 - \frac{r^5}{16} \right) dr$$

$$= \pi \left(\frac{5r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{96} \right) \Big|_0^2$$

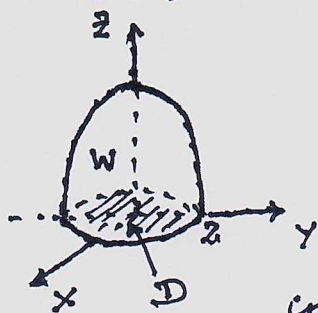
$$= \pi \left(5 \cdot 2 - 4 - \frac{4}{6} \right) = \pi \left(10 - 4 - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{16}{3} \pi}}$$

$$(2) \quad I_z = \int_W (x^2 + y^2) f \, dV$$

$$f(x, y, z) = kz, \quad W: \text{limitado por } \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solução:



$$W: \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad D: x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\text{coord. cilíndricas: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ J &= r \end{aligned}$$

$$W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases}$$

$$I_z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r^2 \cdot kz \cdot r \, dz \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{1}{2} k r^3 (4 - r^2)^2 \, dr = k\pi \int_0^2 r^3 (4 - r^2)^2 \, dr$$

$$= k\pi \int_0^2 (16r^3 - 8r^5 + r^7) \, dr$$

$$= k\pi \left(\frac{16}{4} r^4 - \frac{8r^6}{6} + \frac{r^8}{8} \right) \Big|_0^2$$

$$= k\pi \left(64 - \frac{8}{3} 2^5 + 2^5 \right) = 2^5 k\pi \left(2 - \frac{8}{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{2^5 k\pi}{3}$$