

4.1. Calcule a integral de linha do campo vetorial $f(x, y, z) = (y^2 - z^2)\vec{i} + 2yz\vec{j} - x^2\vec{k}$, ao longo do caminho descrito por $\vec{\alpha}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

4.2. Calcule $\int_c \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde c é o quadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, percorrido no sentido anti-horário.

4.3. Verifique que o caminho descrito por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2 \sin(1/t)\vec{j}$, $0 < t \leq 1$, e $\vec{r}(0) = \vec{0}$ não é regular.

4.4. Considere um fio uniforme semicircular de raio a .

(a) Mostre que o *centróide* jaz no eixo de simetria a uma distância $2a/\pi$ do centro;

(b) Calcule o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa nas extremidades do fio.

4.5. Seja $S = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e considere o campo vetorial f definido em S por $f(x) = \|x\|^p x$, sendo p uma constante real. Encontre uma função potencial para f . O caso $p = -2$ deve ser tratado separadamente.

4.6. Considere o exercício precedente para o campo vetorial f definido por:

$$f(x) = \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x,$$

sendo g uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$.

4.7. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e convexo e admita que f é um campo contínuo e conservativo em S . Verifique que é possível construir um potencial φ para f por meio da relação:

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle f(a + t(x - a)), (x - a) \rangle dt,$$

onde $a \in S$ é um ponto fixado. Se, em particular, $0 \in S$, então pode-se considerar:

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle f(tx), x \rangle dt.$$

4.8. Mostre que o conceito de integral dupla para funções escadas não depende da escolha da partição. Isso torna o conceito consistente!

4.9. Calcule a integral dupla $\iint_Q y^{-3} e^{tx/y} dx dy$, onde $Q = [0, t] \times [1, t]$, $t > 0$, dado que a integral existe.

4.10. Se Q é um retângulo do $\mathbb{R}^2$, mostre que uma integral dupla da forma $\iint_Q f(x) g(y) dx dy$ é igual ao produto de duas integrais unidimensionais.

4.11. Seja f definida no retângulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ como segue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & \text{se } x + y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Faça um esboço do conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in Q \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ e calcule $\text{vol}(S)$ por integral dupla.

4.12. Considere o exercício precedente com a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

4.13. Resolva o Exercício 4.11 quando $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

4.14. Seja f definida no retângulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ como segue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Prove que a integral dupla de f sobre Q existe e é igual a zero.

4.15. Um sólido S do $\mathbb{R}^3$ abaixo do gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de uma região R do plano- xy tem volume dado por:

$$\text{vol}(S) = \int_1^2 \left[\int_x^{x^2} f(x, y) dy \right] dx + \int_2^8 \left[\int_x^8 f(x, y) dy \right] dx.$$

(a) Faça um esboço da região R e escreva $\text{vol}(S)$ como uma integral dupla com a ordem de integração invertida.

(b) Calcule o volume de S .

4.16. Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Se A é finito, mostre que A tem *conteúdo* zero. Se as coordenadas dos pontos de A são todas racionais, mostre que A tem *medida* zero. Dê exemplo de um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$ de *medida* zero e *conteúdo* não nulo.

4.17. Considere a função de Dirichlet em $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ e } y \text{ são racionais} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O conjunto D_f de descontinuidades de f tem medida zero? A função f é integrável sobre Q ?

4.18. Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ descrita por:

$$x = Au + Bv, \quad y = au + bv$$

e suponha que o jacobiano $J(T) \neq 0$. Mostre que T transforma retas em retas e determine a imagem do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(-2, 2)$ pela transformação T .

4.19. Use uma transformação linear adequada e calcule a integral dupla de $(x - y)^2 \sin^2(x + y)$ sobre o paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

4.20. Se $r > 0$, seja $I(r) = \int_{-r}^r e^{-t^2} dt$.

(a) Mostre que $I^2(r) = \iint_Q \exp(-x^2 - y^2) dx dy$, onde Q é o quadrado $Q = [-r, r] \times [-r, r]$;

(b) Se $\alpha \leq r \leq \beta$, mostre que:

$$\iint_{V_\alpha(0)} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \leq I^2(r) \leq \iint_{V_\beta(0)} \exp(-x^2 - y^2) dx dy;$$

(c) Calcule o limite $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r)$ e deduza que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$;

(d) Calcule $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2 - y^2) dx dy$.