

3.1. Localize e classifique os pontos críticos da função $z = f(x, y)$. Determine se a função tem máximo ou mínimo absoluto em seu domínio.

- (a) $z = xy$ (b) $z = \ln(xy) - 2x - 3y$ (c) $z = xy^2 + x^2y - xy$
 (d) $z = x^2 - xy + y^2$ (e) $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 6y$ (f) $z = x^4 + y^3 + 32x - 9y$
 (g) $z = 1 - x^2 - 2y^2$ (h) $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 3x - 4y - 3$ (i) $z = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

3.2. Verifique que no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$ a função f do Exercício 6.1(b) não tem mínimo. Qual o maior valor que f assume em D ? Construa uma função contínua em D que não possui máximo nem mínimo.

3.3. Determine o máximo e o mínimo (absolutos) de $z = f(x, y)$ no conjunto D indicado:

- (a) $z = xy$; $D : 2x^2 + y^2 \leq 1$ (b) $z = x + y$; D é o quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$
 (c) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$; $D : (x - 2)^2 + y^2 \leq 1$ (d) $z = xe^{-x} \cos y$; $D : [-1, 1] \times [-\pi, \pi]$

3.4. Determine o(s) ponto(s) da curva $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin(t/2)$ mais distante(s) da origem.

3.5. Quais das funções seguintes tem um máximo ou mínimo em todo plano $\mathbb{R}^2$?

- (a) $z = e^{x^2 - y^2}$ (b) $z = e^{-x^2 - y^2}$ (c) $z = x^2 - 2x(\sin y + \cos y)$.

3.6. Determine o(s) ponto(s) da superfície $z = xy + 2$ mais próximo(s) da origem.

3.7. Determine a distância (mínima) da origem à curva $y^2 = (x - 1)^3$. Por que o Método dos Multiplicadores de Lagrange não se aplica nesse caso?

3.8. Seja $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Mostre que na reta $y = mx$ a função f tem um mínimo em $(0, 0)$, mas a origem não é um mínimo local. Esboce o conjunto dos pontos (x, y) onde $f < 0$ e onde $f > 0$.

3.9. Determine constantes a e b que tornam a integral $\int_0^1 (ax + b - x^2) dx$ mínima.

3.10. Seja $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$, onde $A > 0$ e $B^2 < AC$.

(a) Determine o valor mínimo de f ;

(b) Mostre que no ponto P_0 onde f assume seu valor mínimo, tem-se:

$$f(P_0) = \frac{1}{AC - B^2} \det \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}$$

3.11. Determine 3 números positivos cuja soma seja 5 e o produto o maior possível.

3.12. Se x, y e z são números reais não negativos, mostre que $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$.

3.13. Fixe n pontos $z_1, z_2, \dots, z_n$ do $\mathbb{R}^m$ e defina $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{k=1}^n \|x - z_k\|^2$. Prove que f atinge seu valor mínimo no ponto $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$ (o centróide)

3.14. Entre todos os pontos do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ que estão acima do plano $x + 2y + 3z = 0$, encontre o ponto mais afastado do plano.

3.15. Seja a um ponto estacionário de um campo escalar f de classe C^2 na bola $V_\delta(a)$. Prove que a é um ponto de sela se ao menos duas das entradas diagonais da matriz $H(a)$ têm sinais opostos.

3.16. Verifique que $A(1, 1, 1)$ é um ponto estacionário da função $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ e determine sua natureza.

Problemas de Máximo e Mínimo

3.17. A temperatura T no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$. Em que ponto do disco a temperatura é mais alta e em que ponto ela é mais baixa?

3.18. A temperatura T em um ponto $P(x, y, z)$ da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é dada por $T(P) = 100xy^2z$. Em qual ponto da esfera a temperatura é máxima e em qual ponto ela é mínima?

3.19. Uma caixa retangular sem tampa deve ter $32m^3$ de volume. Determine suas dimensões de modo que sua área total seja mínima.

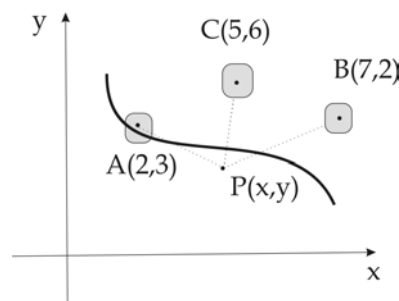
3.20. Determine o volume da maior caixa retangular com lados paralelos aos planos coordenados que pode ser colocada dentro do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3.21. *Método dos Mínimos Quadrados:* A reta $f(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos dados $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ é aquela em que os coeficientes a e b minimizam a função

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2.$$

Esta reta é denominada *regressão linear*. Determine a reta que melhor se ajusta aos dados $A(1, 3), B(2, 7)$ e $C(3, 8)$.

3.22. A figura ao lado exibe a posição relativa de três cidades A, B e C. Urbanistas pretendem aplicar o Método dos Mínimos Quadrados, apresentado no Exercício 6.27, para decidir onde construir uma nova escola que atenda às três comunidades. A escola será construída em um ponto $P(x, y)$ de tal forma que a soma dos quadrados das distâncias da escola às cidades A, B e C seja mínima. Determine a posição relativa do local da construção.



3.23. A tabela abaixo relaciona as médias semestrais e as notas do exame final de 10 alunos da disciplina cálculo 2, no período 03.2.

Média Semestral	4,0	5,5	6,2	6,8	7,2	7,6	8,0	8,6	9,0	9,4
Exame Final	3,0	4,5	6,5	7,2	6,0	8,2	7,6	9,2	8,8	9,8.

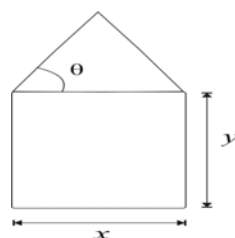
Ajuste uma reta a esses dados para estimar a nota do exame final de um aluno, cuja média semestral seja 7,0.

3.24. De todos os paralelepípedos retângulos com mesmo volume, mostre que o de menor área é o cubo.

3.25. Dentre os triângulos com perímetro p , mostre que o triângulo equilátero é o que possui área máxima. (sugestão: a área do triângulo com perímetro p é $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde $p = 2s = a + b + c$)

3.26. Um paralelepípedo retângulo possui 3 de suas faces nos planos coordenados. Seu vértice oposto à origem está no plano $4x + 3y + z = 36$ e no primeiro octante. Determine esse vértice de tal forma que o paralelepípedo tenha volume máximo.

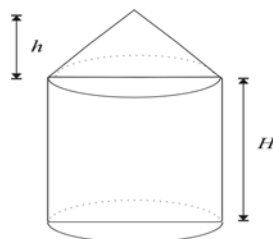
6.34. Uma janela tem o formato de um retângulo superposto por um triângulo isóceles, como mostra a figura ao lado. Se o perímetro da janela é $12m$, calcule x, y e θ , de modo que a área da janela seja a maior possível.



3.27. Uma indústria planeja fabricar caixas retangulares de $8m^3$ de volume. Determine as dimensões que tornam o custo mínimo, se o material para a tampa e a base custa o dobro do material para os lados.

3.28. Calcule o volume da maior caixa retangular que tem 3 de seus vértices no primeiro octante sobre os eixos x, y e z e um quarto vértice no plano de equação $2x + 3y + 4z = 12$.

3.29. Uma tenda é projetada na forma de um cilindro circular reto, com teto de forma cônica, como sugere a figura ao lado. Se o cilindro tem raio igual a $5m$ e a área total da superfície que envolve a tenda é $100m^2$, calcule a altura H do cilindro e a altura h do cone, de modo que a tenda tenha o maior espaço interno possível.



3.30. Três componentes elétricos de um computador estão localizados em $A(0,0)$, $B(4,0)$ e $C(0,4)$. Determine a posição de um quarto componente de modo que a demora do sinal seja mínima.

6.31. Três genes A, B e O determinam os quatro tipos sanguíneos humanos: A (AA ou AO), B (BB ou BO) e AB. A lei de *Hard-Weinberg* estabelece que a proporção de indivíduos de uma população que são portadores de 2 genes diferentes é governada pela fórmula $P = 2pq + 2pr + 2rq$,

sendo p , q e r as proporções de genes A, B e C, respectivamente, na população. Prove que P não deve exceder $2/3$. Note que p , q e r são não negativos e $p + q + r = 1$.

6.32. A resistência de uma viga retangular varia como o produto de sua largura pelo quadrado de sua profundidade. Determine as dimensões da viga de maior resistência que pode ser cortada de um toro cilíndrico cujas seções são elípticas, com eixos maior e menor medindo 24cm e 16cm , respectivamente.

Atenção! A condição $\nabla f + \lambda \nabla g = \vec{0}$ é necessária mas não suficiente para garantir a ocorrência de um valor extremo de $f(x, y)$ sujeito à restrição (vínculo) $g(x, y) = 0$. Por exemplo, considerando $f(x, y) = x + y$ e a restrição $xy = 16$, o método dos Multiplicadores de Lagrange nos leva aos pontos $P_1(-4, -4)$ e $P_2(4, 4)$ como candidatos a pontos extremos. Ainda assim, f não tem máximo na hipérbole $xy = 16$. Quanto mais distante da origem estiver $P(x, y)$ nessa hipérbole no 1º quadrante maior será o valor de $x + y$.