



2.1. Um campo escalar f é definido em $\mathbb{R}^n$ pela equação $f(x) = a \cdot x$, onde a é um vetor constante. Calcule a derivada direcional $D_v f(x)$ no ponto x e direção v arbitrários.

2.2. Resolva o exercício precedente no caso em que $f(x) = \|x\|^4$. Considere $n = 2$ e determine todas as direções v para as quais $D_v f(2, 3) = 6$.

2.3. Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e defina o campo escalar f em $\mathbb{R}^n$ por $f(x) = xT(x)$. Calcule $D_v f(x)$.

2.4. Considere os campos escalares f e g definidos em $\mathbb{R}^2$ por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, $g_{xy}(0, 0)$ e $g_{yx}(0, 0)$. O campo f é diferenciável na origem? E o campo g ?

2.5. Suponha que um campo escalar f tem a seguinte propriedade: $D_v f(x) = 0$, em qualquer direção v e em todos os pontos de uma vizinhança $V_\delta(a)$. Mostre que f é constante nessa vizinhança. O que se pode deduzir no caso em que a propriedade é válida em todo ponto da vizinhança, mas em uma direção fixa?

2.6. Prove que não existe um campo escalar f tal que $D_v f(a) > 0$ para um ponto fixo a e toda direção não nula v . Dê exemplo de um campo escalar com a seguinte propriedade: $D_v f(x) > 0$, para uma direção fixa e todo ponto x .

2.7. Considere a função $f(x, y) = 3x^2 + y^2$, restrita ao círculo $x^2 + y^2 = 1$. Determine os pontos e as direções para os quais a derivada direcional de f é máxima.

2.8. Determine os valores das constantes a, b e c de modo que a derivada direcional de $f(x, y, z) = ax^2 + byz + cz^2x^3$ no ponto $(1, 2, -1)$ tenha valor máximo 64 na direção do eixo z .

2.9. Em $\mathbb{R}^3$ seja $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e deixe r representar a norma de $\vec{r}$, isto é, $r = \|\vec{r}\|$. Mostre que : (a) $\nabla r(x, y, z)$ é um vetor unitário colinear com $\vec{r}$; (b) $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$.

2.10. Suponha que f é diferenciável em cada ponto da vizinhança $V_\delta(a)$ e que $v_1, v_2, \dots, v_n$ são n vetores linearmente independentes. Se $D_{v_j}f(x) = 0$ em qualquer ponto x de $V_\delta(a)$, mostre que f é constante em $V_\delta(a)$.

2.11. Suponha que f é diferenciável em cada ponto de $V_\delta(a)$.

(a) Se $\nabla f(x) = 0$ para todo x em $V_\delta(a)$, mostre que f é constante em $V_\delta(a)$;

(b) Se $f(x) \leq f(a)$ para todo x em $V_\delta(a)$, mostre que $\nabla f(a) = 0$.

2.12. Determine um vetor $V(x, y, z)$ normal a superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$, em um ponto genérico $(x, y, z) \neq \vec{0}$. Se $\theta(x, y, z)$ representa o ângulo entre $V(x, y, z)$ e o eixo z , determine o limite de $\cos \theta$ quando $(x, y, z) \rightarrow \vec{0}$.

2.13. Considere as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ definidas pelas equações $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \sin v$. Mostre que os vetores gradientes $\nabla u(x, y)$ e $\nabla v(x, y)$ são perpendiculares em cada ponto (x, y) , com $x > 0$.

2.14. Seja $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

(a) Verifique que $\partial_x f(0, 0) = 0$ e $\partial_y f(0, 0) = 0$;

(b) A função f admite plano tangente na origem? (sugestão: considere a seção da superfície com o plano $x = y$)

2.15. Encontre a equação cartesiana do plano tangente à superfície $xyz = a^3$, $a > 0$, no ponto (x_0, y_0, z_0) e mostre que o volume do tetraedro limitado por este plano e os três planos coordenados é $9a^3/2$.

2.16. Se $\nabla f(x, y, z)$ é sempre paralelo ao vetor $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, mostre que f assume iguais valores nos pontos $(0, 0, \pm a)$.

2.17. As equações $u = (x - y)/2$ e $v = (x + y)/2$ transformam $f(u, v)$ em $F(x, y)$. Use uma forma apropriada da regra da cadeia para expressar as derivadas parciais F_x e F_y em termos das derivadas f_u e f_v .

2.18. As equações $u = f(x, y)$, $x = X(s, t)$ e $y = Y(s, t)$ definem u como função de s e t , digamos, $u = F(s, t)$. Considerando que $f_{xy} = f_{yx}$, mostre que:

$$F_{ss} = f_x X_{ss} + f_{xx} (X_s)^2 + 2X_s Y_s f_{xy} + f_y Y_{ss} + f_{yy} (Y_s)^2$$

2.19. Seja $h(x) = f[g(x)]$, onde $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ é um campo diferenciável em a , e f é um campo escalar diferenciável em $b = g(a)$. Mostre que:

$$\nabla h(a) = \sum_{k=1}^n D_k f(b) \nabla g_k(a).$$

2.20.

(a) Se $f(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, prove que a matriz Jacobiana $Jf(x, y, z)$ é a matriz identidade 3×3 ;

(b) Encontre todos os campos diferenciáveis $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para os quais a matriz Jacobiana é a identidade 3×3 ;

(c) Encontre todos os campos diferenciáveis $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para os quais a matriz Jacobiana é uma matriz diagonal 3×3 da forma $\text{diag}(p(x), q(y), r(z))$, onde $p(x)$, $q(y)$ e $r(z)$ são funções contínuas dadas.