



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Exercícios & Complementos

Disciplina:	Cálculo Avançado	Período:	04.1
Professor:	Marivaldo P. Matos	UFPB	JP
Sala:	CAC103	Horário:	SQ08002

joão pessoa, PB

maio/2004

Propriedades Métricas do $\mathbb{R}^N$

Funções Contínuas

1.1. Se x e y são números reais não negativos, mostre que

$$2xy \leq x^2 + y^2. \quad (1)$$

Quando ocorre a igualdade em (1)?

1.2. Se $x_1, x_2, \dots, x_N$ são números reais não negativos, verifique a relação:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N)^{1/N} \leq \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N). \quad (2)$$

Quando ocorre a igualdade em (2)? Como sugestão, use a desigualdade $\exp(\lambda) \geq 1 + \lambda$, com $\lambda = -1 + x_i/A$, onde $A = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)/N$, e em seguida efetue as multiplicações membro a membro.

1.3. Usando o Método de Indução Finita, verifique que a relação abaixo é válida para qualquer $N \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N b_j \right) = \sum_{i,j=1}^N a_i \cdot b_j$$

1.4. Em $\mathbb{R}^1$ considere uma norma $\|\cdot\|$. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x\| = C|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$.

1.5. Se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^N$, mostre que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

1.6. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ *preserva norma* se $\|Tx\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ e *preserva produto interno* se $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(a) Prove que T preserva norma se, e somente se, preserva produto interno;

(b) Se T preserva norma, mostre que T é um isomorfismo e que T^{-1} é da mesma natureza.

1.7. Se x e y são vetores não nulos do $\mathbb{R}^N$, o ângulo entre x e y , denotado por $\angle(x, y)$, é definido por $\arccos(\langle x, y \rangle / (\|x\| \cdot \|y\|))$. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ preserva ângulo se T é um isomorfismo e para $x \neq y$ tem-se $\angle(Tx, Ty) = \angle(x, y)$.

(a) Se T preserva norma, mostre que T preserva ângulo;

(b) Se existir uma base $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ do $\mathbb{R}^N$ de vetores próprios de T , com respectivos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, sendo todos os $|\lambda_i|$ iguais, prove que T preserva. Verifique que a recíproca não é verdadeira considerando a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(1, 0) = (1, 0)$ e $T(1, 1) = -(1, 1)$.

1.8. Mostre que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ é uma relação de equivalência.

1.9. Demonstra-se que uma norma em $\mathbb{R}^N$ é gerada por um produto interno quando a desigualdade do paralelogramo for atendida para esta norma. Verifique que em $\mathbb{R}^N$ a norma $\|\cdot\|_S$ não é gerada por um produto interno. Idem para a norma $\|\cdot\|_\infty$.

1.10. Dados $x \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, mostre que $B_r(x) = x + B_r(0)$. Mostre também que $z \in B_r(x) \Leftrightarrow z = x + ry$, com $y \in B_1(0)$, e use isto para estabelecer uma bijeção $h : B_1(0) \longleftrightarrow B_r(x)$.

1.11. Determine o *exterior*, o *interior*, a *fronteira* e o *fêcho* de cada subconjunto do $\mathbb{R}^N$ dado abaixo, classificando-o topologicamente em : *aberto*, *fechado*, *limitado*, *compacto*, etc.

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$

(b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0 \text{ ou } x > 0 \text{ e } y = 0\}$

(c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 1\}$

(d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2/4 > 1\}$

(e) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y)\|_\infty < 2\}$

1.12. O produto cartesiano $R = I \times J$ de dois intervalos abertos da reta é denominado um *retângulo aberto* do $\mathbb{R}^2$. O que muda nos conceitos de interior, exterior e fronteira quando se substitui a expressão *vizinhança aberta* por *retângulo aberto*? Como você define *retângulo aberto* do $\mathbb{R}^N$?

1.13. Mostre que $S \subset \mathbb{R}^N$ é aberto se, e somente se, $S \cap \partial S = \emptyset$.

1.14. Mostre que $x \in \overline{S}$ se, e somente se, $S \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$.

1.15. Dado $S \subset \mathbb{R}^N$, mostre que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$.

1.16. Mostre que o interior de um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ é o maior aberto do $\mathbb{R}^N$ contido em S , enquanto o fecho de S é o menor fechado que o contém.

1.17. Seja $S \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto. Mostre que os subconjuntos abertos em S são precisamente os abertos do $\mathbb{R}^N$ contidos em S .

1.18. Mostre que $A \subset S$ é aberto em S se, e somente se, para cada $x \in A$, existe um raio $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap S \subset A$.

1.19. Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Verifique qual dos conjuntos abaixo é aberto em S .

$$A = \{(x, y) \in S; x^2 + y^2 < 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in S; x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x \geq 0\}$$

$$C = \{(x, y) \in S; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

1.20. Prove a seguinte igualdade elementar entre conjuntos: $A - B = A \cap B^c$. Deduza a partir desta relação que se A é aberto e B é fechado, então $A - B$ é aberto. E se A for fechado e B for aberto será que $A - B$ é fechado?

1.21. Um ponto $x_0 \in S \subset \mathbb{R}^N$ é denominado *ponto isolado* de S quando existir um raio $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap S = \{x_0\}$. Mostre que um ponto de S ou é um ponto isolado ou é um ponto de acumulação.

1.22. Verifique que os conjuntos abaixo são convexos.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y\}$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Mostre que uma esfera do $\mathbb{R}^N$ não é um conjunto convexo. A interseção de dois convexos é ainda convexo? E a união?

1.23. Mostre que uma função vetorial $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em x_0 se, e somente se, cada função coordenada $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua em x_0 .

1.24. Sejam $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas funções contínuas em um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ tais que $f(x) = g(x)$ para qualquer x em S . Mostre que f e g coincidem em $\overline{S}$.

1.25. Prove que $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in S$, se para toda sequência $\{X_k\}$ em S convergindo para a , a sequência $\{f(X_k)\}$ tem uma subsequência convergindo para $f(a)$.

1.26. Use a função $f(x) = x^2$ para mostrar que a imagem de um conjunto aberto da reta por uma função contínua pode não ser um aberto. Procure exemplificar este resultado em $\mathbb{R}^2$.

1.27. Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, mostre que $f^{-1}(F)$ é fechado em S . Substitua o fechado F por um aberto A e prove um resultado análogo. Conclua que o conjunto dos *zeros* de uma função contínua, e em particular o *núcleo* de um operador linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, é fechado

1.28. Considere $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } 0 < y < x^2\}$ e mostre que qualquer reta passando pela origem contém um intervalo em torno de $(0, 0)$ que não toca o conjunto A . Defina $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = 0$, se $x \notin A$ e $f(x) = 1$, se $x \in A$ e fixado $h \in \mathbb{R}^2$, defina $g_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_h(t) = f(th)$. Mostre que g_h é contínua em $t = 0$, embora f não seja contínua em $(0, 0)$.

1.29. Considere um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que A não é fechado. Mostre que é possível definir uma função contínua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ não limitada. Como sugestão considere um ponto $x_0 \notin A \cup \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ e defina $f(x) = 1/\|x - x_0\|$.

1.30. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto compacto, mostre que qualquer função contínua em K é limitada e atinge seus extremos.