

UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO NUMÉRICO - JUNHO/2004
PROF. LENIMAR NUNES DE ANDRADE - *lenimar@mat.ufpb.br*

- 1) Sejam a' , b' e c' os inteiros mais próximos de $a = e^\pi - \pi$, $b = 22\pi^4$ e $c = \frac{163}{\ln 163}$. Calcule os erros absolutos Δ_a , Δ_b , Δ_c e os erros relativos δ_a , δ_b e δ_c cometidos quando substituimos a' , b' , c' por a , b , c .
- 2) Considere a' e b' como sendo aproximações para a e b com erros absolutos inferiores a ϵ_1 e ϵ_2 , respectivamente. Mostre que ao aproximarmos $a + b$ por $a' + b'$ o erro cometido é menor do que ou igual a $\epsilon_1 + \epsilon_2$.
- 3) Um terreno de formato retangular foi medido com um erro que não excedeu 20 cm e o comprimento e a largura encontrados foram 30 m e 12 m, respectivamente. Obtenha uma estimativa para o erro no cálculo da área desse terreno.
- 4) A aresta de uma caixa em forma de cubo é medida, e, devido à falta de precisão do instrumento utilizado, obteve-se uma aresta de 40 cm com erro no máximo igual a 3 mm. Determine o volume aproximado da caixa, um intervalo $[a, b]$ que contenha o valor do volume exato e uma estimativa para o erro do cálculo do volume.
- 5) Conhecidos os números $x = 2,15$ e $y = 5,40$ com erros absolutos $\Delta_x = 0,04$ e $\Delta_y = 0,02$, obtenha uma estimativa para o erro da sua diferença $x - y$ e para o quociente x/y .
- 6) A fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 44 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{682} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{12943}$$

foi utilizada no Japão em dezembro/2002 para calcular π com 1 trilhão e 200 milhões de casas decimais. Utilizando essa fórmula com apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento em série de $\operatorname{arctg} x$, calcule π com erro no máximo igual a 0,0000001.

- 7) Utilizando apenas os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série de $\cos x$, calcule uma aproximação para $\cos 11^\circ$ e obtenha uma estimativa para o erro máximo cometido.
- 8) A função $f(x) = \ln(x + 1)$ com $|x| < 1$ possui o seguinte desenvolvimento em série de potências de x :

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

Utilizando os 6 primeiros termos dessa série, calcule $\ln(1,8)$ e uma estimativa do erro cometido na aproximação.

- 9) a) Usando o Método de Newton, escreva a fórmula de recorrência de uma seqüência de **coeficientes racionais** que converge para $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{7}}$.
b) Usando a seqüência do item (a), partindo de $x_0 = 1$, calcule o valor de α com erro no máximo igual a $\epsilon = 10^{-4}$.

10) Deduza uma fórmula de recorrência que permita calcular a raiz cúbica de um número real. Use a fórmula obtida para calcular $\sqrt[3]{11}$ com erro inferior a 10^{-6} .

11) Deduza uma fórmula de recorrência que permita calcular $\sqrt[n]{a}$ para qualquer número real positivo a .

12) Em cada caso a seguir, encontre um intervalo $[a, b]$ tal que a função $f(x)$ tenha sinais opostos em $f(a)$ e $f(b)$ (isto é, $f(a)f(b) < 0$)

a) $f(x) = \ln(x) + x - 5$ b) $f(x) = e^x - x - 2$ c) $f(x) = x^5 + x + 1$

13) Encontre uma raiz da equação $x = 2 \sin x$ que seja próxima de $x = 2$ com erro inferior a 10^{-4} .

Determine, com erro inferior a 10^{-3} , uma raiz de cada uma das seguintes equações:

14) $x + \sin x = 1$

15) $x^2 - 10 \ln x - 3 = 0$

Usando o método da eliminação de Gauss, resolva os seguintes sistemas lineares:

16)
$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 5 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

17)
$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 7 \\ 3x - y - t = 2 \\ 2x + z + 5t = 8 \\ -2y + 2z - 5t = -5 \end{cases}$$

18) Encontre uma solução do sistema

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 67 = 0 \\ x^3 - 3xy^2 + 35 = 0 \end{cases}$$

que seja próxima de $x = 2$, $y = 3$ com erro inferior a 0,02.

Determine uma solução com erro inferior a 0,01 a partir do ponto (2, 2) para cada sistema abaixo:

19)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ e^x - y = 1,5 \end{cases}$$

20)
$$\begin{cases} 7,66e^x + x - y = 0 \\ \sin^2 x + 2,21 \sin x = y \end{cases}$$

21) A equação $f(x) = 2x \sin(4x) - 3 = 0$ possui uma infinidade de raízes (veja o gráfico de $f(x)$ na figura 1). Determine pelo menos uma dessas raízes com erro no máximo igual a 10^{-6} .

22) Na figura 2 está representada a função $f(x) = x^3 - 8x + 3$. Determine todas as raízes reais da equação algébrica $x^3 - 8x + 3 = 0$ com erro inferior a 0,001.

23) Um tanque em forma de cilindro circular com raio 2 m está “deitado” (na posição horizontal) com uma quantidade de água que corresponde a 1/4 da sua capacidade. Determine a altura da água.

Figura 1:

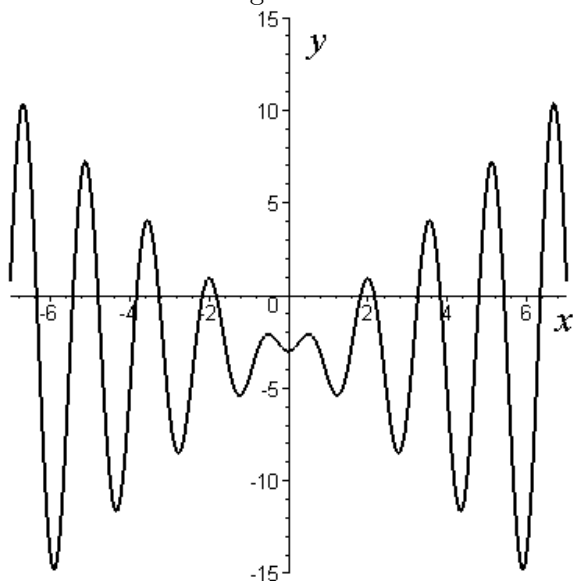
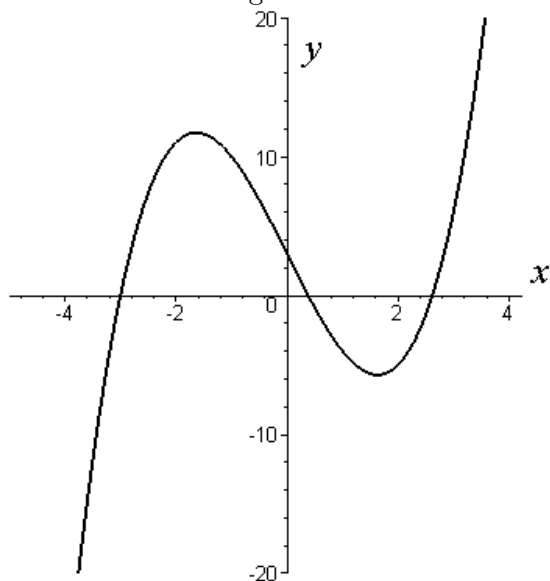


Figura 2:



24) Através de uma mudança de variável, toda equação do terceiro grau pode ser reduzida à forma $x^3 + px + q = 0$ cuja solução exata pode ser calculada através da fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Considerando a equação $x^3 + 5x + 2 = 0$,

- determine um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz;
- determine uma sequência que convirja para uma raiz;
- calcule uma raiz usando a sequência obtida no item anterior;
- calcule novamente a raiz usando a fórmula de resolução exata citada acima;
- comparando as respostas obtidas nos itens (c) e (d), calcule o erro absoluto cometido no item (c).

25) De acordo com informações da página www.ibge.gov.br, a população total da cidade de João Pessoa nos anos 1991, 1996 e 2000 está dada na seguinte tabela

ANO	POPULAÇÃO
1991	497.600
1996	549.363
2000	597.934

Usando interpolação polinomial, obtenha uma estimativa para a população de João Pessoa no ano 1998.

26) Conhecendo os logaritmos decimais $\log 7 = 0,845098$ e $\log 7,5 = 0,875061$, use interpolação linear para obter uma estimativa para $\log 7,3$.

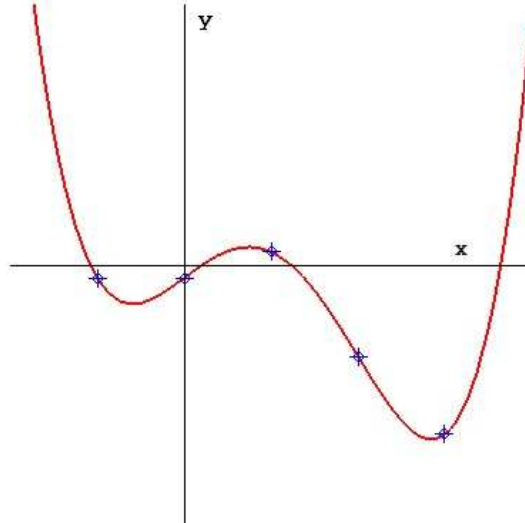


Figura 3: Exercício N. 3

27) O gráfico da figura é de uma função polinomial que passa pelos pontos $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, -7)$, $(3, -13)$. Determine esse polinômio.

28) Sejam x_0 , x_1 e x_2 números reais. Mostre que $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$ e que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_1, x_0, x_2]$.

29) O Teorema Fundamental da Álgebra garante que um polinômio não nulo de grau n tem exatamente n raízes (reais ou complexas). Usando esse resultado, mostre que o polinômio de interpolação $P_L(x)$ dos pontos da tabela

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

obtido segundo a fórmula de Lagrange e o polinômio $P_N(x)$ obtido segundo a fórmula de Newton coincidem. (Sugestão: verifique as raízes do polinômio $f(x) = P_L(x) - P_N(x)$).

30) a) Calcule a integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

b) Sabendo que o valor exato dessa integral é $\frac{\sqrt{2}}{4} \ln(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ calcule o erro cometido na aproximação do item (a).

31) a) Usando a regra de Simpson com $n = 10$, calcule as integrais $A = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ e $B = \int_0^4 \frac{1}{x+1} dx$.

b) Calcule $\frac{A}{A+B}$ que é uma aproximação para $\log_{10}(2) \approx 0,301030$.

32) Calcule o comprimento C da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ sabendo que ela pode ser parametrizada por $\alpha(t) = (3 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e que $C = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt$.

Calcule a integral

$$\int_1^5 \frac{1}{x^4 + 2} dx$$

33) usando a regra de Gauss com 3 pontos t_0 , t_1 e t_2 ;

34) usando a regra de Simpson com $n = 8$.

Calcule cada uma das seguintes integrais usando um dos métodos numéricos estudados:

35) $\int_{-1}^2 2^{x^2} dx$

36) $\int_1^3 \sqrt{x^3 + 1} dx$

37) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3+x^2}} dx$

38) Um carro percorre uma pista de corridas em 84 segundos. A velocidade do carro a cada intervalo de 6 segundos é determinada com auxílio de um radar e está mostrada em metros por segundo na seguinte tabela:

t	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
v	0	75	99	109	124	119	133	144	130	110	125	130	109	110	120

Qual é o comprimento da pista?

39) Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ os pesos e $x_1, x_2, \dots, x_n$ as abscissas da regra de Gauss com n pontos para o cálculo de uma integral. Mostre que $\sum_{i=1}^n A_i = 1$ e que $\sum_{i=1}^n A_i x_i = 0$.

40) Usando o método de Euler com $h = 0,2$, determine $y(2,4)$ para o PVI:

$$x^2 + y' = 1 + y^2, \quad y(1) = 1.$$

41) a) Usando o método de Euler com $h = 0,2$ calcule $y(1)$ sabendo que $y(x)$ é a solução do PVI

$$2x + yy' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

b) Sabendo que a solução exata do PVI do item (a) é $y = \sqrt{2x+1}$, calcule o erro absoluto cometido na aproximação de $y(1)$.

42) Usando o método de Runge-Kutta de 2ª ordem com $h = 0,1$, determine $y(1,3)$ para o PVI:

$$y^2 = y' + x + 2, \quad y(1) = 1,3.$$

43) Usando o método de Runge-Kutta de 3ª ordem com $h = 0,1$, determine $y(1,2)$ para o PVI:

$$y^2 - y' - x = 3, \quad y(1) = 1,5.$$

44) Usando o método de Runge-Kutta de 3ª ordem com $h = 0,1$, determine $y(1,3)$ para o PVI:

$$y^2 + x = y' + 5, \quad y(1) = 0,7.$$

45) Considerando o PVI

$$y' - y^2 = 3x + 1, \quad y(3) = 1$$

e usando o *método de Runge-Kutta de 4ª ordem* com $h = 1/4$, calcule $y(4)$.

46) Considerando os pontos da tabela

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	0,25	0,75	1,00	1,50	2,50

determine a equação da curva da forma $y = bx^a$ que melhor se ajusta a eles e calcule os desvios d_i de cada ponto da tabela com relação a essa curva.

47) Determine a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ da forma $y = a + \frac{b}{x}$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1	2	3	4
y_i	12	7	5	2

e calcule os desvios d_i de cada ponto da tabela com relação a $\mathcal{H}$.

48) Usando o *método dos mínimos quadrados*, determine a reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	1	1.7	2.1	2.3	3.0

49) Determine uma função $f(x) = be^{ax}$ que melhor se ajusta aos pontos (x_i, y_i) da seguinte tabela:

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	3,7	2,2	1,4	0,9	1,0

50) Considere os pontos (x_i, y_i) dados na seguinte tabela:

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0
y_i	0,20	0,09	0,05	0,02

a) Determine uma função $y = f(x) = \frac{1}{ax^2 + b}$ que se ajuste a esses pontos;

b) Calcule o desvio total (isto é, a *soma dos quadrados dos desvios ou resíduos de cada ponto*) dos pontos dados com relação a $f(x)$.

TEMAS PARA TRABALHO

A nota final da disciplina Cálculo Numérico será a média aritmética de 3 notas. Duas notas serão atribuídas a duas provas, uma realizada no meio do semestre e outra no final. A primeira prova abrangerá os assuntos: erros, cálculo de valores de funções, resolução de equações e sistemas e interpolação. A segunda prova abrangerá os assuntos: cálculo de integrais, resolução de equações diferenciais e ajuste de curvas.

No final do semestre, será realizada uma prova de reposição para quem deixou de fazer alguma prova e uma prova final.

A terceira nota deverá ser atribuída a

- um trabalho de computação
- ou a uma lista de 50 exercícios.

O tema do trabalho deverá ser escolhido entre um dos seguintes:

- Tema 1: MÉTODO DE NEWTON PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES.
- Tema 2: RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES PELO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS.
- Tema 3: CÁLCULO DE INTEGRAIS PELA REGRA DE SIMPSON.
- Tema 4: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PELO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 3ª ORDEM.

Cada trabalho deverá conter uma introdução (objetivo, resumo da teoria, história, principais fórmulas utilizadas), listagem do programa-fonte (ou principais funções do programa) e uma conclusão (resultados obtidos, exemplos ou tabelas construídas pelo programa, bibliografia). À introdução serão atribuídos 3,0 pontos, ao programa-fonte serão atribuídos 4,0 pontos e à conclusão serão atribuídos 3,0 pontos.

Na conclusão de cada trabalho, deverão ser resolvidos os seguintes problemas, de acordo com o tema escolhido:

- Tema 1: $x^3 + 2x - 3 = 0$, $e^x = 5 - x^2$, $x + \cos x = 4$.

- Tema 2:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 3x + y + 5z = 6 \\ 4x - y - 5z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 7 \\ 2x + y - z - 7t = -5 \\ 3x + y - z + t = 4 \\ 4x + y + 3z - 8t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z + t + 2w = 7 \\ 3x - 4y + 2z + 3t + w = 9 \\ 2x + 2y + 3z + 5t - w = -4 \\ x - y - z - t - w = -2 \\ 5x + y - z - t - 4w = 5 \end{cases}.$$

- Tema 3: $\int_1^2 \sqrt{5 + 2x^2} dx$, $\int_{-3}^3 \frac{1}{1 + x^4} dx$, $\int_{-1}^4 e^{-x^2} dx$.

- Tema 4: $y' = x^2 + y^2$, $y' = \cos(x + y)$, $y' = 4y - e^{-x^2}$.

O programa poderá ser feito em qualquer linguagem de programação e poderá ser orientado para resolver apenas os problemas citados acima.

ATENÇÃO: O último dia para entregar a lista de exercícios ou o trabalho será no dia em que for marcada a prova de reposição.