

1. Seja $\mathcal{X} = C^0([a, b])$ o espaço vetorial das funções contínuas $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e considere em $\mathcal{X}$ o funcional $\|\cdot\| : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$\|\varphi\|_{\infty} = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|.$$

Mostre que esse funcional define uma *norma* em $\mathcal{X}$ e que a convergência segundo essa norma coincide com a convergência uniforme.

2. Mostre que a sequência de funções $\varphi_n(t) = e^t/t^n$, $1 < t < \infty$, converge pontualmente, mas não uniformemente em $(1, \infty)$.

3. Pode uma sequência de funções descontínuas convergir uniformemente para uma função contínua?

4. Dê exemplo de uma sequência de funções $\{\varphi_n(t)\}$ uniformemente convergente em $\mathbb{R}$, de modo que a sequência de derivadas não converge, sequer pontualmente.

5. Estude a convergência em $[0, \infty)$ das seguintes sequências de funções:

$$(a) \varphi_n(t) = \frac{t^n}{n} \quad (b) \varphi_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n} \quad (c) \varphi_n(t) = \frac{t^n}{n+t^n} \quad (d) \varphi_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^n}$$

6. Teorema de Dini. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência monótona em $C^0([a, b])$, pontualmente convergente para uma função contínua $f \in C^0([a, b])$. Então, a convergência é uniforme em $[a, b]$.*

Verifique que as seguintes sequências de funções monótonas convergem apenas pontualmente e explique porque não há violação do Teorema de Dini.:

$$(a) f_n(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (b) f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (c) f_n(x) = x^n, \quad 0 \leq x < 1$$

7. Considere a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n \\ -n^2(x - 2/n), & \text{se } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0, & \text{se } 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Verifique que a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente para 0 e que a sequência de integrais $\int_0^1 f_n(x) dx$ não converge para 0. Note que nesse caso tem-se: $\lim \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x) dx$. Por que isso não contradiz os resultados estabelecidos em sala de aula?

8. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx^2 + 1)}{n^2}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

9. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções de classe $C^1(a, b)$ e suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ é uniformemente convergente em (a, b) . Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)$.

10. Seja $f(t, x) = 3x^{2/3}$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Verifique que para cada c a função $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $\varphi_c(t) = (t - c)^3$, se $t \geq c$, e $\varphi_c(t) = 0$, se $t \leq c$ é solução da EDO $x' = f(t, x)$. Conclua que o (PC) $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$ possui uma infinidade de soluções.

11. Mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n$ converge pontualmente em $[0, 1]$ para a função $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$

12. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente em cada compacto $[-a, a] \subset \mathbb{R}$.

13. Resolva os seguintes problemas de Cauchy pelo Método das Aproximações Sucessivas:

(a) $x' = -x$; $x(0) = 1$ (b) $x' = 2tx$; $x(0) = 1$

(c) $x' + x^2 = 0$; $x(0) = 0$ (d) $x' + 2tx = t$; $x(0) = 0$

14. Verifique que as funções $x_1(t) \equiv 0$ e $x_2(t) = t|t|$ são soluções do seguinte PC:

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

por que isso não contradiz o Teorema de Existência e Unicidade?

15. Verifique se o Teorema de Existência e Unicidade é aplicável ao PC: $\begin{cases} tx' - 2x = 0 \\ x(1) = 1. \end{cases}$

16. Verifique que as funções $x \equiv 0$ e $x(t) = t^2$ são soluções do PC: $\begin{cases} tx' - 2x = 0 \\ x(0) = 0. \end{cases}$

Por que esse exemplo não viola o Teorema de Existência e Unicidade?

17. Quantas soluções da *edo* $x' = 1 - x^2$ passam pela origem? Quais são essas soluções?

18. Utilizando o Teorema de Existência e Unicidade, mostre que a função $x(t) \equiv 0$ é a única solução do PC.:

$$\begin{cases} x'' + e^t x' + (t+1)x = 0 \\ x(1) = 0, y'(1) = 0. \end{cases}$$

19. Considere o exercício precedente com $x(t) \equiv 1$ e o PC:

$$\begin{aligned} x''' + t^2 x'' + \sqrt{t^2 + 1} x' &= 0 \\ x(0) &= 1, x'(0) = 0, x''(0) = 0. \end{aligned}$$

20. Considere o PC $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = 1. \end{cases}$ Verifique que as condições do Teorema de Existência e Unicidade são atendidas nesse caso e, portanto, existe uma única solução definida no intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$. A solução desse PC pode ser estendida à toda reta $\mathbb{R}$? E se a condição inicial fosse substituída por $x(0) = 0$?

21. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada $n \times n$ e defina a norma de A por $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$. Mostre que:

(a) $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n;$

(b) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$

22. Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável e $\|\varphi(t)\| \neq 0, \forall t$, mostre que $\left| \frac{d}{dt} \|\varphi(t)\| \right| \leq \|\varphi'(t)\|.$

23. Seja E a $n \times n$ matriz real dada por: $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Mostre que a matriz principal do sistema $\dot{X} = EX$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & t & 1 \end{bmatrix}$$

24. Use o exercício precedente e calcule $\exp(\lambda I + E)$, onde I representa a matriz identidade $n \times n$

25. Denote por $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ a matriz diagonal quadrada A cuja diagonal é constituída dos blocos quadrados $A_j, 1 \leq j \leq k$. Em analogia com o caso unidimensional, descreva a matriz $\exp(tA)$ em função das matrizes A_j . Como fica a matriz A no caso em que $A_j = \lambda_j I + E_j$?

26. Mostre que os autovalores da matriz e^{tA} são $e^{t\lambda_j}$, sendo λ_j os autovalores da matriz A . Se os autovalores da matriz A são todos reais e negativos, mostre que a solução do

problema $\begin{cases} \dot{\mathfrak{X}} = A\mathfrak{X} \\ \mathfrak{X}(0) = \mathfrak{X}_0 \end{cases}$ tem a seguinte *propriedade de decaimento*: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathfrak{X}(t)\| = 0.$