

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Departamento de Matemática

Lista 6.1

Disciplina: Introdução a Análise, **Data:** 2/03/2004.

Professor:Everaldo

1) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(tx) = |t|f(x)$ para todo $x, t \in \mathbb{R}$. Se f é diferenciável na origem, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *positivamente homogênea de grau* $k \in \mathbb{R}$ quando $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Mostre que f é positivamente homogênea de grau k se, e somente se, cumpre a seguinte *relação de Euler*

$$kf(x) = f'(x)x.$$

3) Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é uma função de classe C^∞ . Encontre $f'(0) = f''(0) = \dots = f^n(0)$ e determine o resto de Taylor infinitesimal.

4) Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $t_1, t_2 \in [0, 1]$ com $t_1 + t_2 = 1$ tem-se

$$f(t_1 + x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

5) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único ponto $c \in (a, b)$ com $f(c) = 0$.

6) Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua convexa tal que $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Prove que f tem um único ponto fixo.