

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Departamento de Matemática

Lista 6

Disciplina: Introdução a Análise, **Data:** 20/01/2004.**Aluno:** _____

1) Prove que se

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$$

então a equação

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

tem pelo menos uma raiz entre 0 e 1.

2) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $g'(a) \neq g'(b)$. Se f, g são deriváveis em (a, b) e $f'(t), g'(t) \neq 0$ em (a, b) , prove que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Verifique que isto é uma generalização do Teorema do valor médio de Lagrange.

3) Responda se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo:

i) Se a derivada de uma função for identicamente nula, a função é constante.

ii) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2; \quad \forall \quad x, y \text{ in } \mathbb{R},$$

então f é constante. (sugestão: encontre a derivada de f)4) Sejam $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$ se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se num ponto $a \in X \cap X'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$ então existe $g'(a)$ e tem o mesmo valor.5) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b) . Suponha que $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$f'(c) = kf(c)$. (sug: Tome $p(x) = f(x)e^{-kx}$ e use o Teorema de Rolle).

6) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e existe $f'(a)$, mostre que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Dê um exemplo para mostrar que a existência deste limite não implica na existência da derivada.

7) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e par (ímpar), mostre que f' é ímpar (par).

8) Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ such that $p''(c) = 0$.

9) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. suponha que existe $f'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, e existe $f''(a)$ mostre que

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) - f(a-h)}{h^2}.$$

Dê um exemplo para mostrar que a existência deste limite não implica na existência da derivada segunda em a .

10) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que f seja derivável em (a, b) . Mostre que se $f'(x) \neq 0$ em (a, b) , então f' não muda de sinal em (a, b) .

11) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável. Se $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|$, para todo $x \in \mathbb{R}$ mostre que $f \equiv 0$.

12) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$ se, e somente se, f é derivável na origem.