

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Departamento de Matemática

Lista 3

Disciplina: Introdução a Análise, **Data:**10/01/2004**Aluno:** _____1) Seja $A \subset \mathbb{R}$, mostre que:i) A é um conjunto aberto se, e somente se, $x \in A \Rightarrow x \notin (\overline{A})^c$.ii) $(\text{int}(A))^c = \overline{(\overline{S})}^c$.2) Mostre que $\overline{S} = \text{int}(S) \cup \partial S$.

3) Prove que a fronteira de um conjunto aberto é fechado.

4) Mostre que:

i) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$; ii) $A^o \cup B^o \subset (A \cap B)^o$.

Dê um exemplo para verificar que a igualdade em (ii) pode não ser verdadeira.

5) Se o supremo ou o ínfimo de um conjunto S existe, prove que ele pertence a $\overline{S}$.6) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que se $X' \neq \emptyset$ então X é infinito. Dê exemplo de um conjunto X tal que $X' = \emptyset$ e exemplo de um conjunto Y tal que $Y' = Y$.7) Seja $X \subseteq Y \subset \mathbb{R}$. Mostre que X é denso em Y se, e somente se, dado qualquer aberto $A \subset Y$ tivermos $X \cap A \neq \emptyset$.8) Seja (F_n) uma sequência de fechados não-vazio tal que $F_{n+1} \subset F_n$. Mostre que se um dos conjuntos F_n é limitado então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Dê um exemplo para mostrar que esta conclusão pode ser falsa, se todos os F_n não forem limitados.9) Uma função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *simicontínua inferiormente* no ponto a quando para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow f(a) - \epsilon < f(x)$.

Formule definição análoga para *semicontínua superior*. Prove que se f, g são semicontínua inferiormente no ponto a , o mesmo ocorre com $f + g$ e cf , caso $c > 0$. Se $c < 0$ então cf será semicontínua superiormente. Prove que uma função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *semicontínua inferiormente* (em todos os pontos) se, e somente se, para todo $b \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}((b, +\infty))$ é aberto.

10) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente, com $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, é semicontínua superiormente.

12) Seja (K_n) uma sequência decrescente de conjuntos compactos, isto é, $K_{n+1} \subset K_n$. Se A é um conjunto aberto com $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset A$. Então K_n para algum n .

13) Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito separável, se ele possui um subconjunto $Y \subset X$ denso e enumerável. Mostre que $\mathbb{R}$ é separável.

14) Fazer todos os exercícios (cap 5) do livro do Elon-Análise Real.

Boa sorte meus jovens!!!