

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Departamento de Matemática

Lista 2

Disciplina: Introdução a Análise, **Data:** 23/10/2003**Aluno:** _____2) Sejam $a, b \geq 0$. Mostre que

$$\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}.$$

3) Seja (a_n) dada por $a_1 = \sqrt{5}$ e $a_n = \sqrt{5 + a_{n-1}}$ ($n \geq 2$). Mostre que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.4) Mostre que (a_n) é convergente e calcule o seu limite, onde

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}.$$

5) Se $\lim a_n = a$, prove que

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a.$$

Sug: Faça $a_n = a + t_n$ e note que $\lim t_n = 0$.

6) Considere o conjunto denotado e definido por:

$$l^2 := \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) / \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}.$$

Verifique que l^2 é um espaço vetorial.

7) Responda se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo (se verdadeira, dê uma justificativa breve, se falso dê um contra-exemplo):

() Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, também converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$.() Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.8) Sejam $t_0, t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ tais que $t_0 + t_1 + \dots + t_p = 0$. Mostre que a sequência cujo termo geral é dado por

$$a_n = t_0 \sqrt{n} + t_1 \sqrt{n+1} + \dots + t_p \sqrt{n+p},$$

tende a zero.

9) Responda se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo (se verdadeira, dê uma justificativa breve, se falso dê um contra-exemplo):

- () Toda seqüência limitada é convergente;
- () Toda seqüência de Cauchy é limitada;
- () Se uma seqüência de Cauchy tem uma subsequência convergente, ela é convergente;
- () Toda seqüência decrescente e limitada inferiormente é convergente;
- () A seqüência $a_n = (-1)^n + \frac{1}{3} \cos(n)$ tem uma subsequência convergente.
- () Seja (x_n) uma seqüência tal que $x_n \rightarrow a > 0$, então $x_n > 0$ para n grande.
- () Se $\sum (a_n)^2$ converge então $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
- () Se $\sum a_n$ converge e $a_n > 0$ então $\sum (a_n)^2$ e $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

10) Sejam $0 < a < b$. Considere a seqüência definida por $a_1 = a$ e $a_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + s_n^2}{a+1}}$. Mostre que $\lim a_n = b$.

11) Considere a série $\sum a_n$ de termos positivos. Mostre que a série $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge (ou diverge) se a série $\sum a_n$, $a_n \geq 0$ convergir (ou divergir).

12) Mostre que a seqüência

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n},$$

é convergente.

13) Seja $2 < p < q$ defina indutivamente a seqüência

$$\begin{cases} p + 2s_o - 2 = q, \\ p + 2s_{j+1} - 2 = s_j q. \end{cases}$$

Verifique que $s_j > 1$ and $s_j \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$. (Sug: verique que (s_j) é monotona e suponha que s_j seja limitada produzindo um absurdo!!).

14) Seja (x_n) uma sequencia limitada. Denote por $X_n = x_n, x_{n+1}, \dots$. Defina $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$ e note que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Portanto, existem os limites

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup \inf_n X_n, \quad a = \lim b_n = \inf b_n = \inf \sup_n X_n.$$

Denotaremos $a = \underline{\lim} x_n$ (chamado de limite inferior de (x_n)) e $b = \overline{\lim} x_n$ (chamado de limite superior de (x_n)). Sejam (x_n) , (y_n) duas sequencias limitadas. Mostre as seguintes propriedades:

- a) $\underline{\lim}(x_n + y_n) \geq \underline{\lim}(x_n) + \underline{\lim}(y_n)$.
- b) $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}(x_n) + \overline{\lim}(y_n)$
- c) $\overline{\lim}(x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim}(x_n) \cdot \overline{\lim}(y_n)$
- d) $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}(x_n)$.

15) Fazer todos os exerc cios (cap 3,4) do livro do Elon-Análise Real.

Boa sorte meus jovens!!!