

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Departamento de Matemática

1^a Lista (Números Reais)

Disciplina: Introdução à Análise, **Prof:** Everaldo

1) Use a desigualdade de Bernoulli para mostrar que

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} \text{ e deduzir que } \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2) Encontre os seguintes conjuntos:

$$i) \cap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad ii) \cup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \quad iii) \cap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right) \quad iv) \cap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right].$$

O que você pode concluir com isto?

3) Mostre que $|a - b| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, se e somente se, $a = b$.

4) Mostre que $\sum_{n=1}^k a_n b_n \leq \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^k a_n^2 + \sum_{n=1}^k b_n^2)$.

5) Mostre que $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ e $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

6) If $B \supset A \neq \emptyset$ e B é limitado, mostre que $\sup B \geq \sup A \geq \inf A \geq \inf B$.

7) Prove que $r = \sup\{x \in \mathbb{R} : x < r\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : x > r\}$.

8) Se a é uma cota superior de um conjunto A , e b é uma cota inferior de A e $a, b \in A$, mostre que $a = \sup A$ e $b = \inf A$.

9) Sejam A, B conjuntos não-vazios limitados de números reais. Defina $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$, Mostre que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

10) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas. Verifique que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Podemos afirmar que ocorre a igualdade?

- 11) Sejam A, B conjuntos não-vazios limitados de números reais. Dado $c \in \mathbb{R}$, defina $cA := \{cx : x \in A\}$, Mostre que $\sup(cA) = c \sup A$ e $\inf(cA) = c \inf A$ caso $c > 0$. Quando $c < 0$, tem-se $\sup(cA) = c \inf A$ e $\inf(cA) = c \sup A$.
- 12) Se $c > 1$, $c \in \mathbb{R}$, mostre que $c^n > c$. (sugestão: $c = 1 + \alpha$; $\alpha > 0$ e use a desigualdade de Bernoulli)
- 13) Prove que $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \geq |a_1| - |a_2| - \dots - |a_n|$.
- 14) Se $a \in \mathbb{R}$ é racional e $b \in \mathbb{R}$ é irracional, mostre que $a + b$ é irracional. Dê exemplo de dois irracionais cuja soma é racional.
- 15) Mostre que $\sqrt[3]{5}$ não é racional.
- 16) Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, prove que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- 17) Dados $r, s \in \mathbb{Q}$, com $r < s$, mostre que $\alpha = r + (s - r)/\sqrt{2}$ é irracional e que $r < \alpha < s$.
- 18) Prove que $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ (desigualdade triangular generalizada).
- 19) (Existência da representação decimal) Mostre que todo número real positivo pode ser escrito de modo único na forma: $n_0, n_1 n_2 \dots$, onde $n_i \in \mathbb{N}$.
- 20) (Existência da raiz) Para cada $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que existe um único $y > 0$ tal que $y^n = x$. Denotamos y por $\sqrt[n]{x}$.
- 21) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup A \leq \inf B$. Além disso, $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \epsilon$.
- 22) Fazer todos os exercícios do livro do Elon-Análise Real.

Boa sorte meus jovens!!!