

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Matemática
Lista de Exercícios $N^{\circ}4$
Equações Diferenciais Parciais

13/05/2005

1. Em qualquer livro de Análise Complexa procure saber o que é uma função analítica.
2. Se f é uma função analítica prove que suas partes, real e imaginária, são harmônicas.
3. Achar a solução geral da equação: $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$, $x \neq 0$
4. Encontre a solução geral da equação: $r^2 f''(r) + ar f'(r) + bf(r) = 0$, onde a e b são constantes.
5. Determine relações entre as constantes a , b , c , d , de modo que a função $f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, seja harmônica.
6. Suponha $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função harmônica. Mostre que as funções abaixo são também harmônicas:
 - a) $v(x, y) = u(x - a, y - b)$, onde a e b são constantes.
 - b) $w(x, y) = u(\lambda x, \lambda y)$, λ constante.
 - c) $z(x, y) = u(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, onde $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, é uma matriz **ortogonal**.
7. Se u_1, u_2 são soluções do problema de Dirichlet, com dados de fronteira f_1 e f_2 , respectivamente, mostre que

$$\max_{\omega} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |f_1 - f_2|.$$

8. (Problema de Dirichlet para um Retângulo) Determine, formalmente, uma função contínua $u : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que :
 - i) $\Delta u(x, y) = 0$, em $(0, a) \times (0, b)$
 - ii) $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$ em $0 < x < a$
 - iii) $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = f(y)$ em $0 \leq y \leq b$.
9. Ilustre o resultado obtido no Exercício 8, considerando o dado de contorno como sendo a função $g(y) = \begin{cases} y , & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y , & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$
10. Seja Ω um domínio (região aberta e conexa) do $\mathbb{R}^3$. Uma função contínua, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser harmônica se, $\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, dita equação de Laplace, nas coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^3$

- a) Escreva a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas.
 - b) Escreva a equação de Laplace em coordenadas esféricas.
11. Outros exercícios serão dados em sala de aula.