

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Matemática
Lista de Exercícios $N^{\circ}3$
Equações Diferenciais Parciais

24/05/2005

1. Sejam $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que,

a) f, f', f'', g, g' sejam contínuas;

b) f''', g'' sejam contínuas por partes;

c) $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L)g(0) = g(L) = 0$.

Prove que os coeficientes de Fourier, a_n , de f , e b_n de g , são dados por,

$$a_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \text{ e } b_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3 c} \int_0^L g''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

2. Denote por E_n a energia do n -ésimo harmônico $u_n(x, t) = \alpha_n \sin(\frac{n\pi ct}{L} + \theta_n) \sin \frac{n\pi x}{L}$ da equação das ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $\rho c^2 = \tau$. Mostre que $E_n = M\pi^2 \alpha_n^2 \omega_n^2$, $M = L\rho$.

3. Mostre que a energia, E , do sistema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ , } \tau = \rho c^2 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ , } u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

é a soma das energias dos seus harmônicos.

4. Use o método de Fourier para resolver o problema:

$$(*) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ , em } \mathcal{R} \\ u(0, t) = u_x(L, t) = 0 \text{ , } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ , } u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Encontre o n -ésimo harmônico de $(*)$ e determine suas frequência, amplitude e energia.

5. Use o método de Fourier para resolver o problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - \alpha u \text{ , em } \mathcal{R} \\ u(0, t) = u_x(L, t) = 0 \text{ , } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ , } u_t(x, 0) = g(x), \alpha > 0. \end{cases}$$

6. Obtenha a equação da energia para o PVIF do exercício 5 e prove a unicidade de solução para o mesmo.

7. Mostre que $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right]$ se escreve na forma $F(x + ct) + G(x - ct)$, com F e G convenientes.

8. Considere o sistema de vibrações forçadas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + A \sin(2\pi\omega t) , & \text{em } \mathcal{R} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) , \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

a) Encontre uma solução particular para,

$$c_n'(t) + (2\pi\omega_n)^2 c_n(t) = A \sin(2\pi\omega t) \quad (1)$$

nos casos $\omega \neq \omega_n$ e $\omega = \omega_n$.

b) Se a solução geral de (1), no caso $\omega \neq \omega_n$, é

$$c_n(t) = a_n \cos(2\pi\omega_n t) + b_n \sin(2\pi\omega_n t) + \frac{A}{4\pi^2} \frac{\sin 2\pi\omega t}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

então prove que

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n(0) \cos 2\pi\omega_n t + \frac{c_n'(0)}{2\pi\omega_n} \sin 2\pi\omega_n t + \\ &+ \frac{A}{4\pi^2(\omega_n^2 - \omega^2)}. \end{aligned}$$

c) Prove que, no caso $\omega = \omega_n$ então,

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n(0) \cos 2\pi\omega t + \frac{c_n'(0)}{2\pi\omega} + \\ &+ \frac{A}{4\pi\omega} \left(\frac{1}{2\pi\omega} \sin 2\pi\omega t - t \cos 2\pi\omega t \right). \end{aligned}$$

9. Mostre que, através da mudança de variáveis, $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$, a equação das ondas $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$ se transforma em $v_{\xi\eta} = 0$, onde $v(\xi, \eta) = u(x + ct, x - ct) = u(x, t)$.

10. Resolver o problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) , & \text{em } \mathcal{R} \\ u(0, t) = A , \quad u(L, t) = B , & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

11. Considere a equação da corda vibrante levemente amortecida:

$$\rho_0 u_{tt} = \tau_0 u_{xx} - \beta u_t, \quad \beta > 0.$$

Use o método de Fourier para determinar uma solução que satisfaça, $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$.

Assuma $\beta^2 < \frac{4\pi\rho_0\tau_0}{L^2}$. ρ_0 e τ_0 constantes positivas.

12. Mostre que as energias, potencial e cinética, são iguais para uma onda viajante $u(x, t) = F(x - ct)$.

13. Considere o problema (corda semi-infinita),

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = p(t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x); \quad u_t(x, 0) = g(x), & x > 0. \end{cases}$$

Determine a expressão da solução desse problema.