

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Matemática
Lista de Exercícios $N^{\circ}2$
Equações Diferenciais Parciais

21/03/2005

1. a) Prove que o problema misto

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, t > 0. \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0. \\ u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}(x - \pi) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \end{cases}$$

tem solução, **exibindo tal solução**.

- b) Determine a temperatura no ponto $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Prove que o problema misto

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, t > 0. \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0. \\ u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -(x - \pi) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \end{cases}$$

tem solução dada por

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \left(e^{-Kt} \sin x - \frac{1}{3^2} e^{-3^2 Kt} \sin 3x + \frac{1}{5^2} e^{-5^2 Kt} \sin 5x - \frac{1}{7^2} e^{-7^2 Kt} \sin 7x + \dots \right)$$

3. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira,

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = x & \text{se } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

4. Resolver, formalmente, o PVIF,

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} & \text{se } 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

5. Determinar a temperatura de equilíbrio do PVIF,

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} & \text{se } 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = \alpha, u(L, t) = \beta & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

6. Determinar a temperatura de equilíbrio do problema misto,

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} + g(x) & \text{se } 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = \alpha, u(L, t) = \beta & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

7. Prove que se a solução do problema (1), conforme notação em sala de aula, existe, então ela é única.
8. Sejam f_1 e f_2 funções contínuas em $[0, L]$ para as quais os problemas mistos,

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx} & \text{se } 0 < x < L, ; t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f_i(x) & \text{se } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

para $i = 1, 2$, tem soluções u_1 e u_2 , no sentido da Def.I.
Prove que,

$$\max_{(x,t) \in \mathcal{R}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in [0, L]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Este exercício mostra a dependência das soluções dos PVIJs em relação aos dados iniciais.

9. Transforme o problema

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx} & \text{se } 0 < x < L, ; t > 0 \\ u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, u(L, t) = B & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{se } 0 < x < L \end{cases}$$

num problema com condições de fronteira homogêneas.

10. Estabelea a convergência uniforme das seguintes séries:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \sin \frac{n \pi x}{L} \\ \text{b)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{-n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \sin \frac{n \pi x}{L} \\ \text{c)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{\frac{-n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \sin \frac{n \pi x}{L} \end{aligned}$$

11. Determine a série de Fourier de cossenos da função $f(x) = L - x$, $0 \leq x \leq L$, sendo f uma função $2L$ -periódica.
12. Resolva o problema misto,

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx} & \text{se } 0 < x < L, ; t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

onde f é a função do exemplo anterior.