

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Matemática
Lista de Exercícios $N^{\circ}1$
Equações Diferenciais Parciais

10/02/2005

1. Desenvolva processo semelhante ao que foi feito em classe para resolver o problema:

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx} & \text{em } \mathfrak{R} \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

2. Sejam f e g funções T -periódicas. Mostre que $f + g$ e fg são T -periódicas.
3. Se f é T -periódica e $\lambda \in \mathbb{R}$, então λf é T -periódica.
4. Seja f uma função T -periódica, diferenciável. Prove que f' , a derivada de f , é T -periódica.
5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função T -periódica. Mostre que:

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função T -periódica. Mostre que $F(x) = \int_0^x f$ é T -periódica se e somente se $\int_0^T f = 0$.
7. Seja f uma função p -periódica ($f(x+p) = f(x)$, $\forall x$). Mostre que a substituição $x = \frac{pt}{2L}$, transforma f numa função $g(t)$, $2L$ -periódica.
8. Seja f uma função definida em $a \leq x \leq b$, periódica, de período $b - a = 2p$. Mostre que os coeficientes de Fourier de f são dados por:
- $$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2k\pi x}{a} dx \quad \text{e}$$
- $$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2k\pi x}{a} dx.$$
9. Seja $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, e $f(x+1) = f(x)$, $\forall x$. Encontre os coeficientes e a série de Fourier de f .

10. Mostre que

$$\text{a) } \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\text{b) } \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = 0, \quad \forall m, n.$$

$$\text{c) } \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases}$$

11. Determinar quais das funções abaixo são periódicas. Determine o período daquelas que são periódicas.
- a) $f(x) = \sin 5x$ b) $f(x) = \cos 2\pi x$ c) $f(x) = \sinh x$
- d) $f(x) = \begin{cases} (-1)^n & , \quad 2n-1 \leq x < 2n \\ 1 & , \quad 2n \leq x < 2n+1 \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
12. Seja $f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad -1 < x < 0 \\ x & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$, $f(x+2) = f(x)$. Encontre uma fórmula para $f(x)$, no intervalo $1 < x < 2$. Qual seria a expressão de f no intervalo $8 < x < 9$?
13. Achar os coeficientes de Fourier de cada uma das funções a seguir:
- a) $f(x) = -x$, $-L \leq x < L$, $f(x+2L) = f(x)$.
- b) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -L \leq x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x < L \end{cases}$, $f(x+2L) = f(x)$.
- c) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$.
- d) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ x & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$, $f(x+4) = f(x)$.
14. Ache a série de Fourier de cada uma das funções do Exercício anterior.
15. Ache a série de Fourier da função $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$ e 2π -periódica.
16. Ache a série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$
17. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $-L \leq x \leq L$. Suponha f $2L$ -periódica. Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Conclua que $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

18. Dada $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$:
- a) escreva f como uma série de senos.
- b) escreva f como uma série de cossenos.
- c) escreva f como uma série de senos e cossenos.
- 19.