

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Matemática
Lista de Exercícios
Equações Diferenciais Ordinárias

17/05/2004

1. Determinar a solução geral de cada uma das seguintes equações:

- a) $y'' + 4y = 0$
- b) $y'' - 4y' + 5y = 0$
- c) $4y'' - y = 0$
- d) $6y'' + 5y' - 6y = 0$
- e) $y'' - y = 0$
- f) $y'' + 2y' + 2y = 0$

2. Considere a equação diferencial $y'' + y' - 6y = 0$ (i).

- a) Determine a solução φ , de (i), tal que $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$.
- b) Determine a solução ψ , de (i), tal que $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$.

3. Considere a equação $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, com a_1 e a_2 constantes reais.

- a) Suponha que $\alpha + i\beta$ seja solução do polinômio característico associado. Mostre que $\alpha - i\beta$, também é solução do polinômio característico.
- b) Mostre que qualquer solução φ , pode ser escrita na forma $\varphi(x) = e^{\alpha x}(d_1 \cos \beta x + d_2 \sin \beta x)$, onde d_1 e d_2 são constantes.
- c) Mostre que $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ e $\beta^2 = a_2 - \frac{a_1^2}{4}$.
- d) Mostre que toda solução encontrada em b), tende a zero , quando $x \rightarrow \infty$, se $a_1 > 0$.

4. Considere a equação $Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = 0$, com L , R e C , constantes positivas.

- a) Calcule todas as soluções, no caso $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0$.
- b) Encontre a solução φ satisfazendo $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$.
- c) Mostre que qualquer solução φ pode ser escrita na forma $\varphi(x) = Ae^{\alpha x} \cos(\beta x - w)$, onde A , α , β e w são constantes. Determine α e β .

5. Considere a equação $y'' + k^2y = 0$, k uma constante positiva.

- a) Para quais valores de k a equação tem solução não trivial, satisfazendo:
 - i) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi) = 0$
 - ii) $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(\pi) = 0$
 - iii) $\varphi(0) = \varphi(\pi)$, $\varphi'(0) = \varphi'(\pi)$.
- b) Nos itens onde a solução não trivial existir, determine-a.

6. Determinar as soluções de cada p.v.i.

- a) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- b) $y'' + (4i + 1)y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7. Seja φ uma função tendo derivada contínua em $[0, \infty)$, tal que $\varphi'(x) + 2\varphi(x) \leq 1$, $\forall x \in [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$. Mostre que $\varphi(x) < \frac{1}{2}$, $\forall x \geq 0$.

8. Determinar uma função φ que tenha derivada contínua em $[0, 2]$, tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, e satisfaça $y'' - y = 0$, em $[0, 1]$, e $y'' - 9y = 0$, em $[1, 2]$.

9. Seja $Ly = y'' + a_1y' + a_2y = 0$, a_1 e a_2 , constantes. Sejam φ_1 a solução satisfazendo, $\varphi_1(x_0) = 1$, $\varphi_1'(x_0) = 0$ e φ_2 , a solução satisfazendo $\varphi_2(x_0) = 0$, $\varphi_2'(x_0) = 1$.
Se φ é a solução satisfazendo, $\varphi(x_0) = \alpha$, $\varphi'(x_0) = \beta$, mostre que $\varphi(x) = \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$, $\forall x$.

10. Determinar quais pares de funções, definidas em $-\infty < x < \infty$, a seguir, são LI ou LD:

- a) $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$
- b) $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$
- c) $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = 5x^2$
- d) $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = |x|$
- e) $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = e^{ix}$
- f) $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = 3(e^{ix} - e^{-ix})$

11. Mostre que $\varphi_1(x) = x$ e $\varphi_2(x) = x|x|$, são LI em $(-\infty, \infty)$ e calcule $W(\varphi_1, \varphi_2)$.

12. Considere a equação $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, a_1, a_2 reais e $4a_2 - a_1^2 > 0$.

- a) Se $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ são as raízes do polinômio característico, então $\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $\varphi_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ são soluções da equação $y'' + a_1y' + a_2y = 0$.
- b) Ache $W(\varphi_1, \varphi_2)$ e prove que φ_1 e φ_2 são LI.

13. Seja φ_n solução de

$$\begin{cases} y'' + n^2y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \dots$. Prove que $\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$, se $n \neq m$.

14. Mostre que, se $n \neq m$, então:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx)dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx)dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx)dx = 0.$$

15. Achar todas as soluções das seguintes equações:

- a) $y'' + 4y = \cos x$
- b) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$
- c) $4y'' - y = e_x$
- d) $6y'' + 5y' - 6y = x$
- e) $y'' - y = e^{2x}$
- f) $y'' - y = xe^x$
- g) $y'' - 2y = \cos(2x)$

16. a) Achar todas as soluções de $y'' + \omega^2y = A \cos(\omega x)$, onde A e ω são constantes positivas.

- b) Mostre que se φ é solução da equação do item a), então $\lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(x)| = +\infty$.

17. Ache equações diferenciais ordinárias, cujas soluções são:

- a) $e^x + 2e^{2x}$
- b) $e^x \cos x - e^x \sin x$
- c) $xe^x - 2e^x$
- d) $x + 1$

18. Para cada equação, no problema (15), determine sua função de Green.

19. Para cada uma das seguintes equações, primeiro encontre a solução geral da homogênea associada. Em seguida, determine sua função de Green e, então, construa uma solução particular, satisfazendo $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

- a) $y'' - y = x$ $x_0 = 0$
- b) $y'' + y = x$ $x_0 = 0$
- c) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ $x_0 = 0$

20. Resolva as equações:

a) $y^{(4)} + 16y = 0$ b) $y''' - 8y = 0$

c) $y''' - 3iy'' - 3y' + iy = 0$

21. (Desafio) Se f e g são funções possuindo derivadas de todas as ordens, prove que:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_k^n f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Sug: Usar indução. Esta fórmula é conhecida como fórmula de Leibniz.

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$