

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Matemática
Lista de Exercícios
Equações Diferenciais Ordinárias

13/05/2004

- Considere a equação $y' + 5y = 2$.
 - Mostre que a função $\varphi(x) = \frac{2}{5} + ce^{-5x}$ é uma solução desta equação, onde c é uma constante.
 - Assumindo que toda solução tem a forma dada em a), ache a solução satisfazendo $\varphi(1) = 2$
 - Ache a solução satisfazendo $\varphi(1) = 3\varphi(0)$.
- Considere a equação $y'' = 3x + 1$.
 - Ache todas as soluções no intervalo $0 \leq x \leq 1$.
 - Ache a solução φ , satisfazendo $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 2$.
- Considere a equação $y' = ky$, em $-\infty < x < \infty$, onde k é uma constante real. Mostre que se φ é qualquer solução e $\psi(x) = \varphi(x)e^{-kx}$, então $\psi(x) = c$, onde c é uma constante.
- Ache todas as soluções das equações:
 - $y' - 2y = 1$
 - $y' + y = e^x$
 - $y' - 2y = x^2 + x$
 - $3y' + y = 2e^{-x}$.
- Considere a equação $Ly' + Ry = E$, onde L, R e E são constantes positivas.
 - Resolva essa equação.
 - Ache a solução φ , tal que $\varphi(0) = I_0$, onde I_0 é uma constante positiva.
 - Mostre que toda solução tende a $\frac{E}{R}$, quando $x \rightarrow \infty$.
- Considere a equação $Ly' + Ry = E \sin \omega x$, onde L, R, E e ω são constantes positivas.
 - Encontre a solução φ , satisfazendo $\varphi(0) = 0$
 - Mostre que essa solução pode ser escrita na forma

$$\varphi(x) = \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}x} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega x - a)$$

- Ache todas as soluções das equações:
 - $y' + 2xy = x$
 - $xy' + y = 3x^3 - 1, x > 0$.
 - $y' + e^x y = 3e^x$
 - $y' - (\tan x)y = e^{\sin x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
 - $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
- Achar a solução φ da equação $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$, tal que $\varphi(\pi) = \pi$.
 - Mostre que $\varphi(m\pi) - \varphi(0) = m\pi$, se m é inteiro.
- Considere a equação $x^2 y' + 2xy = 1$, para $0 < x < \infty$.
 - Mostre que toda solução tende a zero quando $x \rightarrow \infty$.
 - Achar a solução φ tal que $\varphi(2) = 2\varphi(1)$.
- Considere a equação $y' + a(x)y = 0$, $(\star)$, onde a é uma função contínua, no intervalo I .
 - Mostre que a função $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in I$, é solução de $(\star)$. Nesse caso φ é dita solução trivial.
 - Se φ é qualquer solução de $(\star)$ e $\varphi(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in I$, mostre que φ é solução trivial.
 - Se φ e ψ são duas soluções de $(\star)$ e $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, para algum $x_0 \in I$, então $\varphi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in I$.
 - Se φ não é a solução trivial e ψ é qualquer outra solução, mostre que existe uma constante c , tal que $\psi(x) = c\varphi(x)$, para todo $x \in I$.
- A equação, $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^k$, onde k é uma constante, é chamada **Equação de Bernoulli**.
 - Mostre que, fazendo-se a substituição $z = y^{1-k}$, a equação de Bernoulli se transforma em $z' + (1-k)\alpha(x)z = (1-k)\beta(x)$.
 - Resolva a equação $y' - 2xy = xy^2$.

12. Sejam φ e ψ soluções de, $y' + a(x)y = b(x)$, num intervalo I , contendo o ponto x_0 . Mostre que para todo $x \in I$ tem-se:

$$\psi(x) - \varphi(x) = [\psi(x_0) - \varphi(x_0)]e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

13. Ache a solução ψ , da equação, $y' = 1 + y^2$, tal que $\psi(0) = 0$

14. Achar todas as soluções de:

a) $y'' - 4y = 0$ b) $3y'' + 2y' = 0$ c) $y'' + 16y = 0$
d) $y'' = 0$ e) $y'' - 4y' + 5y = 0$

15. Achar a solução φ , de $y'' + y' - 6y = 0$, satisfazendo, $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$.

16. Achar as soluções de $y'' + y = 0$, satisfazendo:

a) $\varphi(0) = 1$ $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 2$.
b) $\varphi(0) = 0$ $\varphi(\pi) = 0$.