

EDEs regressivas e a conexão com EDPs

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta(t, x) + g(t, \theta(t, x), \nabla \theta(t, x)) = 0 \\ \theta(T, x) = h(x) \end{cases}$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta(t, x) + g(t, \theta(t, x), \nabla \theta(t, x)) = 0 \\ \theta(T, x) = h(x) \end{cases}$$

- Vamos supor que o problema acima tem uma solução $\theta(t, x)$.

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta(t, x) + g(t, \theta(t, x), \nabla \theta(t, x)) = 0 \\ \theta(T, x) = h(x) \end{cases}$$

- Vamos supor que o problema acima tem uma solução $\theta(t, x)$.
- Aplicando a fórmula de Itô a $\theta(t, B_t)$ obtemos

$$\theta(t, B_t) = h(B_T) - \int_t^T \left(\partial_s \theta(s, B_s) + \frac{1}{2} \Delta \theta(s, B_s) \right) ds - \int_t^T \nabla \theta(s, B_s) dB_s$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta(t, x) + g(t, \theta(t, x), \nabla \theta(t, x)) = 0 \\ \theta(T, x) = h(x) \end{cases}$$

- Vamos supor que o problema acima tem uma solução $\theta(t, x)$.
- Aplicando a fórmula de Itô a $\theta(t, B_t)$ obtemos

$$\theta(t, B_t) = h(B_T) - \int_t^T \left(\partial_s \theta(s, B_s) + \frac{1}{2} \Delta \theta(s, B_s) \right) ds - \int_t^T \nabla \theta(s, B_s) dB_s$$

- Ou seja,

$$\theta(t, B_t) = h(B_T) - \int_t^T g(s, \theta(s, B_s), \nabla \theta(s, B_s)) ds - \int_t^T \nabla \theta(s, B_s) dB_s$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Isso implica que a solução da EDE regressiva toma a forma

$$Y_t = \theta(t, B_t), \quad Z_t = \nabla \theta(t, B_t)$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Isso implica que a solução da EDE regressiva toma a forma

$$Y_t = \theta(t, B_t), \quad Z_t = \nabla \theta(t, B_t)$$

- Por outro lado, se $(Y_t^{\tau,x}, Z_t^{\tau,x})$ é uma solução da EDE regressiva

$$Y_t^{\tau,x} = h(B_T^{\tau,x}) + \int_t^T g(s, Y_s^{\tau,x}, Z_s^{\tau,x}) ds - \int_t^T Z_s^{\tau,x} dB_s^{\tau,x}, \quad t \in [\tau, T]$$

com $B_t^{\tau,x} = x + B_t - B_\tau, \quad t \in [\tau, T]$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Isso implica que a solução da EDE regressiva toma a forma

$$Y_t = \theta(t, B_t), \quad Z_t = \nabla \theta(t, B_t)$$

- Por outro lado, se $(Y_t^{\tau, x}, Z_t^{\tau, x})$ é uma solução da EDE regressiva

$$Y_t^{\tau, x} = h(B_T^{\tau, x}) + \int_t^T g(s, Y_s^{\tau, x}, Z_s^{\tau, x}) ds - \int_t^T Z_s^{\tau, x} dB_s^{\tau, x}, \quad t \in [\tau, T]$$

com $B_t^{\tau, x} = x + B_t - B_\tau, \quad t \in [\tau, T]$

- Então, $Y_\tau^{\tau, x}$ é uma função determinística e $\theta(\tau, x) = Y_\tau^{\tau, x}$ é uma solução do problema de valor final para a EDP

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demonstração

- $$\begin{aligned}\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau, x) &= Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau}^{\tau, x} = Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} + Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x} \\ &= (\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau + \delta, B_{\tau+\delta}^{\tau, x})) + (Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x}).\end{aligned}$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demonstração

- $$\begin{aligned}\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau, x) &= Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau}^{\tau, x} = Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} + Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x} \\ &= (\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau + \delta, B_{\tau+\delta}^{\tau, x})) + (Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x}).\end{aligned}$$
- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regressiva para a segunda diferença. Lembramos que $B_r^{\tau, x} = x + B_r - B_{\tau}$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demonstração

- $$\begin{aligned}\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau, x) &= Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau}^{\tau, x} = Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} + Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x} \\ &= (\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau + \delta, B_{\tau+\delta}^{\tau, x})) + (Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x}).\end{aligned}$$
- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regressiva para a segunda diferença. Lembramos que $B_r^{\tau, x} = x + B_r - B_{\tau}$
- $$\begin{aligned}\frac{1}{\delta} (\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau, x)) &= -\frac{1}{\delta} \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\tau+\delta} \left(\frac{1}{2} \Delta \theta(\tau + \delta, x + B_r - B_{\tau}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g(\tau + \delta, \theta(\tau + \delta, x + B_r - B_{\tau}), \nabla \theta(\tau + \delta, x + B_r - B_{\tau})) \right) dr \right]\end{aligned}$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demonstração

- $\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau, x) = Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau}^{\tau, x} = Y_{\tau+\delta}^{\tau+\delta, x} - Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} + Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x}$
 $= (\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau + \delta, B_{\tau+\delta}^{\tau, x})) + (Y_{\tau+\delta}^{\tau, x} - Y_{\tau}^{\tau, x}).$
- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regressiva para a segunda diferença. Lembramos que $B_r^{\tau, x} = x + B_r - B_{\tau}$
- $\frac{1}{\delta} (\theta(\tau + \delta, x) - \theta(\tau, x)) = -\frac{1}{\delta} \mathbb{E} \left[\int_{\tau}^{\tau+\delta} \left(\frac{1}{2} \Delta\theta(\tau + \delta, x + B_r - B_{\tau}) \right. \right.$
 $\left. \left. + g(\tau + \delta, \theta(\tau + \delta, x + B_r - B_{\tau}), \nabla\theta(\tau + \delta, x + B_r - B_{\tau})) \right) dr \right]$
 $\rightarrow -\frac{1}{2} \Delta\theta(\tau, x) + g(\tau, x, \theta(\tau, x), \nabla\theta(\tau, x)), \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0.$

Modelo de expressão gênica

Backward SDE approach

Apresentamos brevemente o modelo de expressão gênica.



E. Shamarova, R. Chertovskih, A. F. Ramos, and P. Aguiar,

Backward-stochastic-differential-equation approach to modeling of gene expression, Physical Review E (2017).

Modelo de expressão gênica

Backward SDE approach

Apresentamos brevemente o modelo de expressão gênica.



E. Shamarova, R. Chertovskih, A. F. Ramos, and P. Aguiar,

Backward-stochastic-differential-equation approach to modeling of gene expression, *Physical Review E* (2017).

Considere uma rede reguladora de n genes, onde cada gene gera um certo tipo de proteína

Modelo de expressão gênica

Backward SDE approach

Apresentamos brevemente o modelo de expressão gênica.



E. Shamarova, R. Chertovskih, A. F. Ramos, and P. Aguiar,

Backward-stochastic-differential-equation approach to modeling of gene expression, *Physical Review E* (2017).

Considere uma rede reguladora de n genes, onde cada gene gera um certo tipo de proteína. A dinâmica do nível de proteína η_t^i (quantidade ou concentração) do gene i é descrita por uma EDE regressiva

$$\eta_t^i = h^i(B_T) - \int_t^T f^i(\eta_s) ds - \sum_{j=1}^n \int_t^T z_{ij}^j dB_s^j, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n.$$

com

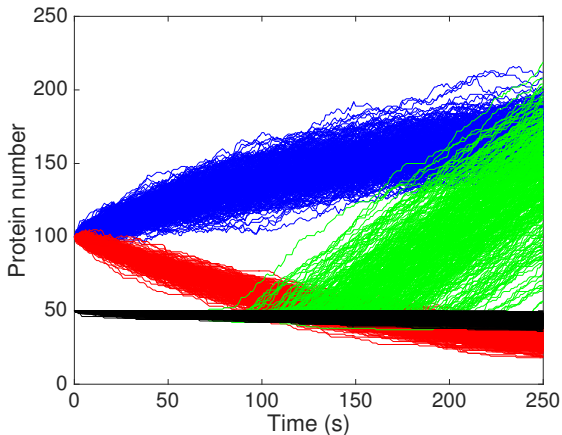
$$f^i(\eta_t) = \underbrace{\frac{\nu_i}{1 + \exp\{-\sum_{j=1}^n A_{ij}\eta_t^j\}}}_{\text{taxa de síntese de proteínas}} - \underbrace{\rho_i \eta_t^i}_{\text{taxa de degradação de proteínas}}$$

A_{ij} descreve ativação, repressão ou nenhuma regulação do gene i por gene j



Modelo de expressão gênica

Trajetórias η_t^i para níveis de proteína de diferentes genes $i = 1, 2, 3, 4$



Modelo de expressão gênica

- Esquema de simulação

Modelo de expressão gênica

- Esquema de simulação



$$\begin{cases} \partial_t \theta^i(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta^i(t, x) + f^i(\theta(t, x)) = 0, & i = 1, \dots, n \\ \theta^i(T, x) = h^i(x) \end{cases}$$

Modelo de expressão gênica

- Esquema de simulação



$$\begin{cases} \partial_t \theta^i(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta^i(t, x) + f^i(\theta(t, x)) = 0, & i = 1, \dots, n \\ \theta^i(T, x) = h^i(x) \end{cases}$$

- Simulação de movimento browniano B_t .

Modelo de expressão gênica

- Esquema de simulação



$$\begin{cases} \partial_t \theta^i(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta^i(t, x) + f^i(\theta(t, x)) = 0, & i = 1, \dots, n \\ \theta^i(T, x) = h^i(x) \end{cases}$$

- Simulação de movimento browniano B_t .
- Substituição: $\eta_t^i = \theta^i(t, B_t)$.

Modelo de expressão gênica

- Esquema de simulação

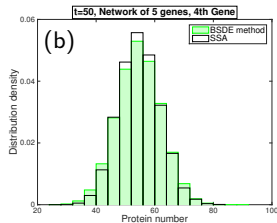
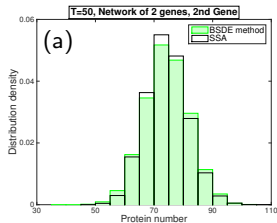


$$\begin{cases} \partial_t \theta^i(t, x) + \frac{1}{2} \Delta \theta^i(t, x) + f^i(\theta(t, x)) = 0, & i = 1, \dots, n \\ \theta^i(T, x) = h^i(x) \end{cases}$$

- Simulação de movimento browniano B_t .
- Substituição: $\eta_t^i = \theta^i(t, B_t)$.
- O processo $\theta^i(t, B_t)$ atualmente foi simulado.

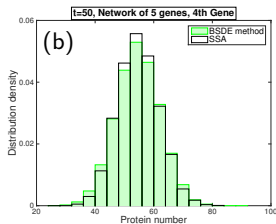
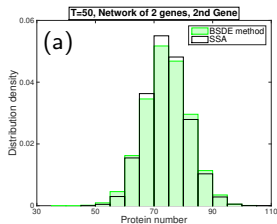
Modelo de expressão gênica

O modelo foi validado pela comparação com o algoritmo de simulação estocástica (SSA) de Gillespie. Este último foi usado para gerar dados de referência a serem usados em vez de dados experimentais.



Modelo de expressão gênica

O modelo foi validado pela comparação com o algoritmo de simulação estocástica (SSA) de Gillespie. Este último foi usado para gerar dados de referência a serem usados em vez de dados experimentais.



- O método de EDE regressiva pode ser considerado uma ferramenta para simulações invertidas no tempo, permitindo, por exemplo, a avaliação das condições biológicas (por exemplo, concentrações de proteínas) que precederam um evento de interesse medido experimentalmente.

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Consideramos EDEs progressivas-regressivas:

$$\begin{cases} X_t = x + \int_t^t f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^t \sigma(s, X_s, Y_s) dB_s \\ Y_t = h(X_T) + \int_t^T g(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \end{cases}$$

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Consideramos EDEs progressivas-regressivas:

$$\begin{cases} X_t = x + \int_t^t f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^t \sigma(s, X_s, Y_s) dB_s \\ Y_t = h(X_T) + \int_t^T g(s, X_s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \end{cases}$$

- A solução é uma tripla de processos estocásticos (X_t, Y_t, Z_t) com valores em $\mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^Q \times (\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^d)$ adaptados em relação à filtração \mathcal{F}_t gerada por B_t .

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Four Step Scheme



J. Ma, P. Protter, J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly – a four step scheme, 1994

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Four Step Scheme



J. Ma, P. Protter, J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly – a four step scheme, 1994

- Existe uma conexão forte entre EDEs progressivas-regressivas e EDPs parabólicas quasi-lineares

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Four Step Scheme



J. Ma, P. Protter, J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly – a four step scheme, 1994

- Existe uma conexão forte entre EDEs progressivas-regressivas e EDPs parabólicas quasi-lineares
- Consideramos a problema de valor final para EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^P (\sigma \sigma^*)_{ij}(t, x, \theta(t, x)) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ + \sum_{i=1}^P f_i(t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x))) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(t, x) \\ + g(t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x))) = 0 \\ \theta(T, x) = h(x) \end{array} \right.$$

$(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^P$, θ toma valores em \mathbb{R}^Q .

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Se $\theta(t, x)$ é a solução do problema de valor final acima

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Se $\theta(t, x)$ é a solução do problema de valor final acima
- X_t é a solução da EDE

$$X_t = x + \int_{\tau}^t \tilde{f}(s, X_s) ds + \int_{\tau}^t \tilde{\sigma}(s, X_s) dB_s,$$

onde $\tilde{f}(t, x) = f(t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)))$,
 $\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, x, \theta(t, x))$

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Se $\theta(t, x)$ é a solução do problema de valor final acima
- X_t é a solução da EDE

$$X_t = x + \int_{\tau}^t \tilde{f}(s, X_s) ds + \int_{\tau}^t \tilde{\sigma}(s, X_s) dB_s,$$

onde $\tilde{f}(t, x) = f(t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)))$,
 $\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, x, \theta(t, x))$

- $X_t = x + \int_{\tau}^t f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds + \int_{\tau}^t \sigma(s, X_s, Y_s) dB_s$

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Se $\theta(t, x)$ é a solução do problema de valor final acima
- X_t é a solução da EDE

$$X_t = x + \int_{\tau}^t \tilde{f}(s, X_s) ds + \int_{\tau}^t \tilde{\sigma}(s, X_s) dB_s,$$

onde $\tilde{f}(t, x) = f(t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)))$,
 $\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, x, \theta(t, x))$

- $X_t = x + \int_{\tau}^t f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds + \int_{\tau}^t \sigma(s, X_s, Y_s) dB_s$
- Então, a solução da EDE progressiva-regressiva toma a forma
 $(X_t, Y_t, Z_t) = (X_t, \theta(t, X_t), \nabla_x \theta(t, X_t) \sigma(t, X_t, \theta(t, X_t)))$

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Por outro lado, se $(X_t^{T,x}, Y_t^{T,x}, Z_t^{T,x})$ a solução de FBSDEs, então

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Por outro lado, se $(X_t^{T,x}, Y_t^{T,x}, Z_t^{T,x})$ a solução de FBSDEs, então
- $Y_\tau^{T,x}$ é determinístico

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Por outro lado, se $(X_t^{T,x}, Y_t^{T,x}, Z_t^{T,x})$ a solução de FBSDEs, então
- $Y_\tau^{T,x}$ é determinístico
- e $\theta(\tau, x) = Y_\tau^{T,x}$ a solução do problema de valor final para a EDP

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Por outro lado, se $(X_t^{T,x}, Y_t^{T,x}, Z_t^{T,x})$ a solução de FBSDEs, então
- $Y_\tau^{T,x}$ é determinístico
- e $\theta(\tau, x) = Y_\tau^{T,x}$ a solução do problema de valor final para a EDP
- A ideia de demonstração é a mesma do que para a EDP

$$\theta(t, B_t) = h(B_T) - \int_t^T g(s, \theta(s, B_s), \nabla\theta(s, B_s)) ds - \int_t^T \nabla\theta(s, B_s) dB_s$$

Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes clássicas são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) = -(y, \nabla) y(t, x) + \nu \Delta y(t, x) - \nabla p(t, x), \\ \operatorname{div} y = 0, \\ y(0, x) = y_0(x). \end{array} \right.$$

Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes clássicas são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) = -(y, \nabla) y(t, x) + \nu \Delta y(t, x) - \nabla p(t, x), \\ \operatorname{div} y = 0, \\ y(0, x) = y_0(x). \end{array} \right.$$

Fixamos um $T > 0$

Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes clássicas são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) = -(y, \nabla) y(t, x) + \nu \Delta y(t, x) - \nabla p(t, x), \\ \operatorname{div} y = 0, \\ y(0, x) = y_0(x). \end{array} \right.$$

Fixamos um $T > 0$ e fazemos a substituição: $y(t, x) \leftrightarrow -y(T - t, x) \dots$

Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes clássicas são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) = -(y, \nabla) y(t, x) + \nu \Delta y(t, x) - \nabla p(t, x), \\ \operatorname{div} y = 0, \\ y(0, x) = y_0(x). \end{array} \right.$$

Fixamos um $T > 0$ e fazemos a substituição: $y(t, x) \leftrightarrow -y(T - t, x)$...

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) + (y, \nabla) y(t, x) = -\nu \Delta y(t, x) - \nabla p(t, x), \\ \operatorname{div} y(t, x) = 0, \\ y(T, x) = h(x) \end{array} \right.$$

Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes clássicas são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) = -(y, \nabla) y(t, x) + \nu \Delta y(t, x) - \nabla p(t, x), \\ \operatorname{div} y = 0, \\ y(0, x) = y_0(x). \end{array} \right.$$

Fixamos um $T > 0$ e fazemos a substituição: $y(t, x) \leftrightarrow -y(T - t, x)$...

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) + (y, \nabla) y(t, x) = -\nu \Delta y(t, x) - \nabla p(t, x), \\ \operatorname{div} y(t, x) = 0, \\ y(T, x) = h(x) \end{array} \right.$$

As equações de Navier-Stokes regressivas

Equações de Navier-Stokes

EDEs progressivas-regressivas associadas

$$\begin{cases} dZ_s = Y_s dr + \sqrt{2\nu} dW_s \\ dY_s = -\nabla p(s, \cdot) \circ Z_r dr + \sqrt{2\nu} X_s dW_s \\ Z_t = e, Y_T = h(\cdot) \circ Z_T \end{cases}$$

Equações de Navier-Stokes

EDEs progressivas-regressivas associadas

$$\begin{cases} dZ_s = Y_s dr + \sqrt{2\nu} dW_s \\ dY_s = -\nabla p(s, \cdot) \circ Z_r dr + \sqrt{2\nu} X_s dW_s \\ Z_t = e, Y_T = h(\cdot) \circ Z_T \end{cases}$$

- Z_s toma valores no grupo de difeomorfismos da classe H^α do toro \mathbb{T}^d que preservam o volume

Equações de Navier-Stokes

EDEs progressivas-regressivas associadas

$$\begin{cases} dZ_s = Y_s dr + \sqrt{2\nu} dW_s \\ dY_s = -\nabla p(s, \cdot) \circ Z_r dr + \sqrt{2\nu} X_s dW_s \\ Z_t = e, Y_T = h(\cdot) \circ Z_T \end{cases}$$

- Z_s toma valores no grupo de difeomorfismos da classe H^α do toro \mathbb{T}^d que preservam o volume
- Y_s toma valores no fibrado tangente desse grupo

Equações de Navier-Stokes

EDEs progressivas-regressivas associadas

$$\begin{cases} dZ_s = Y_s dr + \sqrt{2\nu} dW_s \\ dY_s = -\nabla p(s, \cdot) \circ Z_r dr + \sqrt{2\nu} X_s dW_s \\ Z_t = e, Y_T = h(\cdot) \circ Z_T \end{cases}$$

- Z_s toma valores no grupo de difeomorfismos da classe H^α do toro \mathbb{T}^d que preservam o volume
- Y_s toma valores no fibrado tangente desse grupo
- X_s toma valores em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, H^\alpha)$

Equações de Navier-Stokes

EDEs progressivas-regressivas associadas

$$\begin{cases} dZ_s = Y_s dr + \sqrt{2\nu} dW_s \\ dY_s = -\nabla p(s, \cdot) \circ Z_r dr + \sqrt{2\nu} X_s dW_s \\ Z_t = e, Y_T = h(\cdot) \circ Z_T \end{cases}$$

- Z_s toma valores no grupo de difeomorfismos da classe H^α do toro \mathbb{T}^d que preservam o volume
- Y_s toma valores no fibrado tangente desse grupo
- X_s toma valores em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, H^\alpha)$
- W_s é um movimento browniano n -dimensional

Equações de Navier-Stokes

Conexão com EDEs progressivas-regressivas associadas

Se sabemos a solução $y(s, \cdot)$ das equações de **Navier–Stokes**

Por outro lado, se sabemos a solução (Z_s, Y_s, X_s) das **EDEs progressivas-regressivas**

Equações de Navier-Stokes

Conexão com EDEs progressivas-regressivas associadas

Se sabemos a solução $y(s, \cdot)$ das equações de **Navier–Stokes**

Então,

- $Y_s = y(s, \cdot) \circ Z_s$

Por outro lado, se sabemos a solução (Z_s, Y_s, X_s) das **EDEs progressivas-regressivas**

Equações de Navier-Stokes

Conexão com EDEs progressivas-regressivas associadas

Se sabemos a solução $y(s, \cdot)$ das equações de **Navier-Stokes**

Então,

- $Y_s = y(s, \cdot) \circ Z_s$

Por outro lado, se sabemos a solução (Z_s, Y_s, X_s) das **EDEs progressivas-regressivas**

Então

- É possível mostrar que existe uma função y tal que $Y_s = y(s, \cdot) \circ Z_s$, e y é uma solução das equações de **Navier-Stokes** regressivas

Equações de Navier-Stokes

Geometria do grupo de difeomorfismos do toro

Notação ..

Equações de Navier-Stokes

Geometria do grupo de difeomorfismos do toro

Notação ..

$$\mathbb{T}^d = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_d$$

Equações de Navier-Stokes

Geometria do grupo de difeomorfismos do toro

Notação ..

$$\mathbb{T}^d = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_d$$

$H^\alpha(\mathbb{T}^d)$, $\alpha > 2$, é o espaço de aplicações de Sobolev $\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$,

$G^\alpha = \{g \in H^\alpha(\mathbb{T}^d) : g \text{ is a } C^1\text{-difeomorfismo}\}$,

Equações de Navier-Stokes

Geometria do grupo de difeomorfismos do toro

Notação ..

$$\mathbb{T}^d = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_d$$

$H^\alpha(\mathbb{T}^d)$, $\alpha > 2$, é o espaço de aplicações de Sobolev $\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$,

$G^\alpha = \{g \in H^\alpha(\mathbb{T}^d) : g \text{ is a } C^1\text{-difeomorfismo}\}$,

$G_V^\alpha = \{g \in G^\alpha : g_* \text{vol} = \text{vol}\}$, onde vol é a medida de volume no toro \mathbb{T}^d

Equações de Navier-Stokes

Geometria do grupo de difeomorfismos do toro

Notação ..

$$\mathbb{T}^d = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_d$$

$H^\alpha(\mathbb{T}^d)$, $\alpha > 2$, é o espaço de aplicações de Sobolev $\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$,

$G^\alpha = \{g \in H^\alpha(\mathbb{T}^d) : g \text{ is a } C^1\text{-difeomorfismo}\}$,

$G_V^\alpha = \{g \in G^\alpha : g_* \text{vol} = \text{vol}\}$, onde vol é a medida de volume no toro \mathbb{T}^d

A saber, $g_* \text{vol}[f] = \int_{\mathbb{T}^d} f(g(\theta)) \text{vol}(d\theta) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\theta) \text{vol}(d\theta)$

Equações de Navier-Stokes

Geometry of the diffeomorphism group of the torus

Fatos..

Equações de Navier-Stokes

Geometry of the diffeomorphism group of the torus

Fatos..

Lema

G^α e G_V^α são variedades de Hilbert de dimensão infinita.

Equações de Navier-Stokes

Geometry of the diffeomorphism group of the torus

Fatos..

Lema

G^α e G_V^α são variedades de Hilbert de dimensão infinita.

Lema

$T_e G^\alpha$ é formado por todos os campos vetoriais da classe H^α em \mathbb{T}^d .

Equações de Navier-Stokes

Geometry of the diffeomorphism group of the torus

Fatos..

Lema

G^α e G_V^α são variedades de Hilbert de dimensão infinita.

Lema

$T_e G^\alpha$ é formado por todos os campos vetoriais da classe H^α em \mathbb{T}^d .

Lema

$T_e G_V^\alpha$ é formado por campos vetoriais da classe H^α em \mathbb{T}^d que têm divergência zero.

Equações de Navier-Stokes

Geometry of the diffeomorphism group of the torus

Fatos..

Lema

G^α e G_V^α são variedades de Hilbert de dimensão infinita.

Lema

$T_e G^\alpha$ é formado por todos os campos vetoriais da classe H^α em \mathbb{T}^d .

Lema

$T_e G_V^\alpha$ é formado por campos vetoriais da classe H^α em \mathbb{T}^d que têm divergência zero. **Lemma**

G_V^α é um subgrupo e uma subvariedade suave de G^α .

Equações de Navier-Stokes

A solução de EDEs progressivas-regressivas

- Seja $y(s, \theta)$ uma solução da equação de Navier-Stokes regressiva

Teorema

A EDE $dZ_s^{t,e} = y(s, \cdot) \circ Z_s^{t,e} ds + \sqrt{2\nu} dW_s$ em G_V^α
possui uma solução $Z_s^{t,e}$, $s \in [t, T]$, tal que $Z_t^{t,e} = e$.

Equações de Navier-Stokes

A solução de EDEs progressivas-regressivas

Teorema

Seja $y(s, \cdot)$ uma solução da equação de Navier-Stokes regressiva e seja $Z_s^{t,e}$ a solução da EDE $dZ_s^{t,e} = y(s, \cdot) \circ Z_s^{t,e} ds + \sqrt{2\nu} dW_s$ em G_V^α .

Então, a tripla de processos estocásticos

$$Z_s^{t,e}, Y_s^{t,e} = y(t, \cdot) \circ Z_s^{t,e}, X_s^{t,e} = \sqrt{2\nu} \nabla y(t, \cdot) \circ Z_s^{t,e}$$

é uma solução das EDEs progressivas-regressivas.

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Teorema

Suponha que, para uma função $H^{\alpha+1}$ -suave $p(s, \cdot)$, $s \in [0, T]$, e para qualquer $t \in (0, T)$, existe uma solução \mathcal{F}_s -adaptada $(Z_s^{t,e}, Y_s^{t,e}, X_s^{t,e})$ de EDEs progressivas-regressivas em $[t, T]$, onde $\mathcal{F}_s = \sigma\{W_r, r \in [0, s]\}$. Além disso, vamos supor que $Z_s^{t,e}$ toma valores em G_V^α . Então existe um $T_0 > 0$ tal que para todo $T < T_0$ existe uma função determinística $y(s, \cdot) \in T_e G_V^\alpha$ em $[0, T]$, tal que

$$Y_s^{t,e} = y(s, \cdot) \circ Z_s^{t,e}.$$

Além disso, o par de funções (y, p) é uma solução da equação de Navier-Stokes regressiva em $[0, T]$.

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $Y_t^{t,g}$, $g \in G_V^\alpha$, é determinística

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $Y_t^{t,g}$, $g \in G_V^\alpha$, é determinística
- Introdzimos uma aplicação $y : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto Y_t^{t,e}(x)$;

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $Y_t^{t,g}$, $g \in G_V^\alpha$, é determinística
- Introdzimos uma aplicação $y : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto Y_t^{t,e}(x)$;
- $y(t, x)$ is H^α -suave em x e C^1 -suave em t ;

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $Y_t^{t,g}$, $g \in G_V^\alpha$, é determinística
- Introduzimos uma aplicação $y : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto Y_t^{t,e}(x)$;
- $y(t, x)$ is H^α -suave em x e C^1 -suave em t ;
- Como $Z_s^{t,e}$ toma valores em G_V^α , então $y(t, \cdot) \in T_e G_V^\alpha$, e, portanto, é de divergência zero.

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $Y_t^{t,g}$, $g \in G_V^\alpha$, é determinística
- Introduzimos uma aplicação $y : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto Y_t^{t,e}(x)$;
- $y(t, x)$ is H^α -suave em x e C^1 -suave em t ;
- Como $Z_s^{t,e}$ toma valores em G_V^α , então $y(t, \cdot) \in T_e G_V^\alpha$, e, portanto, é de divergência zero.
- Se ξ toma valores em G_V^α e \mathcal{F}_t -mensurável, então $Y_t^{t,\xi} = y(t, \cdot) \circ \xi$;

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $Y_t^{t,g}$, $g \in G_V^\alpha$, é determinística
- Introduzimos uma aplicação $y : [0, T] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto Y_t^{t,e}(x)$;
- $y(t, x)$ is H^α -suave em x e C^1 -suave em t ;
- Como $Z_s^{t,e}$ toma valores em G_V^α , então $y(t, \cdot) \in T_e G_V^\alpha$, e, portanto, é de divergência zero.
- Se ξ toma valores em G_V^α e \mathcal{F}_t -mensurável, então $Y_t^{t,\xi} = y(t, \cdot) \circ \xi$;
- $\implies Y_s^{t,e} = Y_s^{s,Z_s^{t,e}} = y(s, \cdot) \circ Z_s^{t,e}$

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $$\begin{aligned}y(t + \delta, \cdot) - y(t, \cdot) &= Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_t^{t, e} = Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_{t+\delta}^{t, e} + Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e} \\ &= (\hat{Y}_{t+\delta}(e) - \hat{Y}_{t+\delta}(Z_{t+\delta}^{t, e})) + (Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e}).\end{aligned}$$

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $$\begin{aligned}y(t + \delta, \cdot) - y(t, \cdot) &= Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_t^{t, e} = Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_{t+\delta}^{t, e} + Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e} \\ &= (\hat{Y}_{t+\delta}(e) - \hat{Y}_{t+\delta}(Z_{t+\delta}^{t, e})) + (Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e}).\end{aligned}$$

- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regressiva para a segunda diferença.

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $$y(t + \delta, \cdot) - y(t, \cdot) = Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_t^{t, e} = Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_{t+\delta}^{t, e} + Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e}$$
$$= (\hat{Y}_{t+\delta}(e) - \hat{Y}_{t+\delta}(Z_{t+\delta}^{t, e})) + (Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e}).$$

- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regressiva para a segunda diferença.

- $$\frac{1}{\delta} (y(t + \delta, \cdot) - y(t, \cdot)) = -\frac{1}{\delta} \mathbb{E} \left[\int_t^{t+\delta} dr [(y(r, \cdot), \nabla) y(t + \delta, \cdot) + \nu \Delta y(t + \delta, \cdot) + \nabla p(r, \cdot)] \circ Z_r^{t, e} \right].$$

Equações de Navier-Stokes

Construindo a solução da equação de Navier-Stokes a partir da solução de EDEs progressivas-regressivas associadas

Ideia de demonstração

- $$y(t + \delta, \cdot) - y(t, \cdot) = Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_t^{t, e} = Y_{t+\delta}^{t+\delta, e} - Y_{t+\delta}^{t, e} + Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e}$$
$$= (\hat{Y}_{t+\delta}(e) - \hat{Y}_{t+\delta}(Z_{t+\delta}^{t, e})) + (Y_{t+\delta}^{t, e} - Y_t^{t, e}).$$

- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regressiva para a segunda diferença.

- $$\frac{1}{\delta} (y(t + \delta, \cdot) - y(t, \cdot)) = -\frac{1}{\delta} \mathbb{E} \left[\int_t^{t+\delta} dr [(y(r, \cdot), \nabla) y(t + \delta, \cdot) + \nu \Delta y(t + \delta, \cdot) + \nabla p(r, \cdot)] \circ Z_r^{t, e} \right].$$

- $$\partial_t y(t, \cdot) = -[\nabla_{y(t, \cdot)} y(t, \cdot) + \nu \Delta y(t, \cdot) + \nabla p(t, \cdot)]$$

Equações de Navier-Stokes e EDEs progressivas-regressivas



A. B. Cruzeiro, E. Shamarova. Navier–Stokes equations and forward–backward SDEs on the group of diffeomorphisms of a torus, *Stochastic Processes and their Applications*, vol 119 (12) (2009).